

数学名著译丛

# 抽象代数学

卷 2

线 性 代 数

N. 贾柯勃逊 著

科学出版社



数学名著译丛

# 抽 象 代 数 学

卷 2

线 性 代 数

N. 贾柯勃逊 著

黄 稼 芳 译



科 学 出 版 社

1 9 8 7

8710717

DS99/26

## 内 容 简 介

本书是作者根据他在几所大学里讲授的抽象代数学讲义编成的。全书分三卷。本卷是卷2,专门介绍线性代数。

本卷着重于抽象概念方面,主要阐述了有限维向量空间、线性变换、线性变换的集合、双线性形式、欧几里得空间及单式空间、向量空间的积、线性变换环、无限维向量空间等。书中附有许多精选的例子及习题。本卷虽常使用卷1的名词和结果,但作者尽量使本卷内容自成一体,易于阅读。

本书可供数学研究工作者、高等院校数学系教师和学生参考。

N. JACOBSON

LECTURES IN ABSTRACT ALGEBRA

Vol. II

Linear Algebra

1953

数学名著译丛

抽 象 代 数 学

卷 2

线 性 代 数

N. 贾柯勃逊 著

黄 缘 芳 译

\*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1960年5月第1版 开本:850×1168 1/32

1987年8月第三次印刷 印张:8 3/8

印数:11,001—17,000 字数:214,000

统一书号:13031·3552

本社书号:5640·13-1

定 价: 2.40 元

## 序

本卷是著者的“抽象代数学”三卷中的第二卷。要理解本卷的内容,对第一卷里所述的羣、环、域、同态等基本概念必須有一定程度的熟悉。但我們曾試使綫性代数的叙述与第一卷的細节知識无关,有时列出特殊結果的参考文献,但若干必需的基本概念則予重述。一句話,我們希望对数学有充分修养及对近世代数的基本概念熟悉的讀者能完全理解地讀完这卷。

本卷着重于抽象概念方面;但时常与这个观点有些出入,形式的計算方法有时給出更明确的結果。再則綫性代数的結果自身不是一个終点,而是用在数学及其应用的各分支的主要工具。所以,掌握构造性的而且可用于数值問題的方法是有用的。这些方法有时需要較长的討論,但我們覺得照所指陈的理由来看,它們的提出是正确的。对于抽象代数很熟練的讀者无疑地会看清捷徑的,有些方法則見于脚註中。

书中含有大量习题,很多是用簡單数字說明理論的,其它是难题,用以考驗优秀的讀者。無論如何,要对本卷内容懂得透澈,細心研究这些习题是必要的。

本卷編写的各阶段中,曾利用許多朋友的意見和評論;特別感謝克里福得(A. H. Clifford)、霍赤才得(G. Hochschild)及卡浦兰斯基(I. Kaplansky)关于本卷早期論述的各种建議。我也大大地感謝三年級同学米勒斯(W. H. Mills)的辛苦地协助証明及关于本卷最后修改的各种建議。

賈柯勃遜

1952年9月于新哈文(New Haven, Conn.)

# 目 录

序	i
第一章 有限維向量空間	1
1. 抽象向量空間	3
习題 1	5
2. 右向量空間	5
3. 0-模	6
习題 2	8
4. 綫性相关	8
习題 3	12
5. 維数的不变性	12
习題 4	13
6. 基及陣	13
习題 5	16
7. 陣論上的应用	16
习題 6	19
8. 向量場合的秩, 行列式秩	19
习題 7	22
9. 商空間	22
10. 子空間的代数	23
习題 8	25
11. 无关子空間, 直接和	25
习題 9	27
第二章 綫性变換	28
1. 定义及例子	28
习題 10	29
2. 綫性变換的合成	29
习題 11	32

3. 綫性变换的陣 .....	32
习題 12 .....	34
4. 陣的合成 .....	34
习題 13 .....	37
5. 基的改变, 陣的等价及相似 .....	37
习題 14 .....	39
6. 綫性变换的秩空間与核空間 .....	39
习題 15 .....	41
7. 綫性方程組 .....	42
习題 16 .....	44
8. 右向量空間里的綫性变换 .....	44
习題 17 .....	45
9. 綫性函数 .....	45
习題 18 .....	47
10. 有限維空間与它的共軛空間之間的对偶性 .....	47
习題 19 .....	49
11. 綫性变换的折轉 .....	50
12. 折轉的陣 .....	51
13. 射影 .....	53
习題 20 .....	55
第三章 单独一个綫性变换的理論 .....	56
1. 綫性变换的最低多項式 .....	56
习題 21 .....	58
2. 循环子空間 .....	58
3. 用最低多項式为指导的向量的存在 .....	60
习題 22 .....	61
4. 循环綫性变换 .....	61
习題 23 .....	65
5. 由綫性变换决定的 $\Phi[\lambda]$ -模 .....	66
6. 有限生成的 $\mathfrak{o}$ -模, 这里 $\mathfrak{o}$ 是一个主理想整区 .....	67
7. $\mathfrak{S}$ 及 $\mathfrak{M}$ 的生成元素的正規化 .....	69
8. 元素属于主理想整区的陣的等价 .....	70
习題 24 .....	74

9. 有限生成的 $\mathfrak{o}$ -模的结构	75
10. 不变性定理	78
11. 向量空间关于綫性变换的分解	81
习题 25	87
12. 特征多项式及最低多项式	87
习题 26	88
13. 定理 13 的直接证明	89
习题 27	92
14. 跡及特征多项式的形式的性質	92
习题 28	94
15. 循环 $\mathfrak{o}$ -模的 $\mathfrak{o}$ -自同态环	94
习题 29	95
16. 有限生成的 $\mathfrak{o}$ -模的 $\mathfrak{o}$ -自同态环的决定, $\mathfrak{o}$ 是主理想整区	95
17. 与給定的綫性变换可交换的綫性变换	98
习题 30	99
18. 环 $\mathfrak{B}$ 的心	100
习题 31	101
第四章 綫性变换的集合	102
1. 不变子空间	102
习题 32	104
2. 誘导綫性变换	104
习题 33	106
3. 合成空间列	106
4. 綫性变换集合的可分解性	108
习题 34	110
5. 完全可約性	110
习题 35	111
6. 与算子羣論及模論的关系	112
7. 单独一个綫性变换的可約性、可分解性、完全可約性	113
习题 36	115
8. 空间关于一个綫性变换的准素空间	115
习题 37	118
9. 交换綫性变换的集合	118

习题 38 .....	119
第五章 双綫性形式 .....	121
1. 双綫性形式 .....	121
习题 39 .....	123
2. 双綫性形式的陣 .....	123
3. 非退化形式 .....	124
习题 40 .....	126
4. 綫性变换关于一对双綫性形式的折轉 .....	126
习题 41 .....	129
5. 綫性变换与双綫性形式間的另一个关系 .....	129
6. 純量积 .....	131
7. 厄米特純量积 .....	133
习题 42 .....	135
8. 厄米特純量积的陣 .....	135
习题 43 .....	137
9. 特殊除环上对称及厄米特純量积 .....	137
习题 44 .....	141
10. 交錯純量积 .....	142
习题 45 .....	143
11. 威特定理 .....	144
习题 46 .....	151
12. 非交錯斜称形式 .....	151
第六章 欧几里得空間及单式空間 .....	154
1. 笛卡儿基 .....	154
习题 47 .....	157
2. 綫性变换与純量积 .....	157
3. 正交完全可約性 .....	158
4. 对称、斜称及正交綫性变换 .....	159
5. 对称及斜称綫性变换的典型陣 .....	160
习题 48 .....	162
6. 交换的对称及斜称綫性变换 .....	163
习题 49 .....	164



7. 正規及正交綫性变换 .....	165
习题 50 .....	166
8. 半定变换 .....	166
习题 51 .....	168
9. 任意綫性变换的极因子分解 .....	168
习题 52 .....	170
10. 单式几何学 .....	170
习题 53 .....	173
11. 綫性变换的分析函数 .....	173
习题 54 .....	177
<b>第七章 向量空間的积</b> .....	<b>178</b>
1. 向量空間的积羣 .....	178
习题 55 .....	181
2. 綫性变换的直接积 .....	181
习题 56 .....	182
3. 双側向量空間 .....	182
习题 57 .....	185
4. 克伦內克积 .....	186
习题 58 .....	188
5. 綫性变换及陣的克伦內克积 .....	189
习题 59 .....	191
6. 张量空間 .....	191
7. 张量的对称类 .....	194
习题 60 .....	197
8. 向量空間的域的扩张 .....	197
9. 关于陣集合的相似性的一个定理 .....	199
习题 61 .....	201
10. 代数的另一定义,代数的克伦內克积 .....	201
习题 62 .....	202
<b>第八章 綫性变换环</b> .....	<b>203</b>
1. $\mathfrak{L}$ 的单純性 .....	203
习题 63 .....	204

2. 算子方法 .....	204
3. $\mathcal{Q}$ 的左理想 .....	205
习题 64 .....	207
4. 右理想 .....	208
习题 65 .....	209
5. 綫性变换环的同构 .....	209
习题 66 .....	212
第九章 无限維向量空間 .....	214
1. 基的存在 .....	215
2. 維数的不变性 .....	216
3. 子空間 .....	217
4. 綫性变换及陣 .....	218
5. 共軛空間的維数 .....	220
习题 67 .....	222
6. 綫性变换的有限拓朴 .....	222
习题 68 .....	225
7. $\mathfrak{R}^*$ 的全子空間 .....	225
习题 69 .....	227
8. 对偶空間, 克伦內克积 .....	227
习题 70 .....	230
9. 綫性变换环里双側理想 .....	231
10. 綫性变换的稠密环 .....	233
习题 71 .....	237
11. 同构定理 .....	238
习题 72 .....	240
12. 反自同构与純量积 .....	240
习题 73 .....	244
13. 叔尔引理, 一般稠密性定理 .....	244
14. 綫性变换的不可約代数 .....	247
汉英名詞对照表 .....	250
人名索引 .....	255

## 第一章

### 有限維向量空間

向量在三維解析几何学里是按几何性質来定义的。这里无須重提。从代数观点來說,主要事实是: 向量  $\nu$  乃由它(关于一定坐标系)的三个坐标  $(\xi, \eta, \zeta)$  完全确定, 习惯上記作  $\nu = (\xi, \eta, \zeta)$ , 意味着:  $\nu$  是这样的向量, 它的  $x$ -,  $y$ -及  $z$ -坐标順序为  $\xi, \eta$ , 及  $\zeta$ 。反过来, 实数的任意有序三维组  $(\xi, \eta, \zeta)$  决定一个一定向量。所以在 3-空間里, 向量与实数的有序三维組間存在着 1—1 对应。

几何学里关于向量有三个基本运算: 向量的加法, 向量与純量(数)的乘法, 向量的数积。这里也无須再提这些合成的几何定义, 只要說明在三维組上与几何运算对应的代数方法就够了。如果  $\nu = (\xi, \eta, \zeta)$  及  $\nu' = (\xi', \eta', \zeta')$ , 則和

$$\nu + \nu' = (\xi + \xi', \eta + \eta', \zeta + \zeta').$$

向量  $\nu$  与实数  $\rho$  的积  $\rho\nu$  是向量

$$\rho\nu = (\rho\xi, \rho\eta, \rho\zeta),$$

而  $\nu$  与  $\nu'$  的純量积  $(\nu, \nu')$  是实数

$$(\nu, \nu') = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'.$$

解析几何学的主要部分——綫性相关論及綫性变换論——只与这些概念中的前两者有关。正是这个部分(的扩张形状)构成本书討論的主要論題。純量积的概念是一种度量概念, 在我們的討論中将放在次要地位。

向量关于加法及用数乘的乘法可有两个扩张方向。一个是: 我們的考虑无須限制于三维組, 而是对于任意正整数  $n$  来观察  $n$  维組。另一个是: 我們无須假定坐标  $\xi, \eta, \dots$  是实数。要保証綫性相关論的有效, 我們只須假定有理运算能够施行; 因此可用任意

域来代替实数域。不仅如此,我們还不难进一步把基础数系的可交換性的假設摘去。

所以我們的討論从一个給定的除环  $\Delta$  出发;例如,  $\Delta$  可取下列的任意一个数系: 1) 实数域, 2) 复数域, 3) 有理数域, 4) 模  $p$  下的剩余域, 或 5) 实四維数的除环。

令  $n$  是一个固定的正整数, 并且令  $\Delta^{(n)}$  表  $n$  维组  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  的全体, 这里  $\xi_i \in \Delta$ 。这些  $n$  维组叫做向量, 而  $\Delta^{(n)}$  叫做  $\Delta$  上  $n$  维组的向量空間。如果  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ , 則  $x = y$  必須而且只須  $\xi_i = \eta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。仿照三維实空間情形, 我們在  $\Delta^{(n)}$  里引入两个合成: 向量的加法及以  $\Delta$  的元乘向量的乘法。首先, 如果  $x$  及  $y$  是任意向量, 我們定义它們的和  $x + y$  为向量

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n).$$

关于以  $\Delta$  的元乘向量的乘法有两种可能: 一种是由

$$\rho x = (\rho \xi_1, \rho \xi_2, \dots, \rho \xi_n)$$

定义的左乘法, 另一种是由

$$x\rho = (\xi_1\rho, \xi_2\rho, \dots, \xi_n\rho)$$

定义的右乘法。这两种中的任意一种都可使用, 得出的理論是平行的。但此后我們只采用左乘法, 得出的所有結果都可轉变为右乘法上結果, 这是不待贅言的。

本书的前八章是討論在上面定义的合成下的代数系  $\Delta^{(n)}$ 。我們采用公理的方法, 亦即从列举作为代数系  $\Delta^{(n)}$  的公理的簡單性質来导出所有結果。这些公理定义一个有限維(抽象)向量空間的概念, 而代数系  $\Delta^{(n)}$  是这种空間的例子。不但如此, 我們还会知道, 有限維向量空間的任意其它例子实际上都与一个代数系  $\Delta^{(n)}$  等价。

所以, 采取公理的观点不是受着导致一般化的愿望的推动, 目的还是在于集中注意去弄明白这些代数系的实际性質, 以便把結果容易应用于其它具体例子中。着眼点的放寬最后自然导致在討論向量空間里有用的其它更一般概念的考究。这些概念中最重要的是模的概念, 它成为单一綫性变換論(第三章)的主要工具。为

着对于这种应用做好准备,这里从討論一开始即将叙述这个概念.

本章的目的在給向量空間論奠定基礎. 要討論的主要概念有:基,綫性相关,子空間,商空間及子空間的格.

**1. 抽象向量空間** 今列出  $\Delta^{(n)}$  里合成的性質于次,这些代数的整个理論都可由此导出:

$$A1 \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$

$$A2 \quad x + y = y + x.$$

$$A3 \quad \text{有一个元素 } 0 \text{ 存在,使对于一切 } x \text{ 有 } x + 0 = x.$$

$$A4 \quad \text{对于任意向量 } x \text{ 有一个向量 } -x \text{ 存在,使 } x + (-x) = 0.$$

$$S1 \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

$$S2 \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

$$S3 \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x).$$

$$S4 \quad 1x = x.$$

F 存在着有限个向量  $e_1, e_2, \dots, e_n$ ,使所有向量都有一种方法,并且只有一种方法写成  $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$  的形状.

A1, A2, S1—S4 可以直接驗証. A3 可由观察  $(0, 0, \dots, 0)$  具有所需的性質而得証明. A4 可由观察:如果  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,則可取  $-x = (-\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_n)$  而得証明. 要証 F, 我們取  $e_i$  为

$$(1) \quad e_i = (0, 0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

于是,  $\xi_i e_i$  的第  $i$  位置是  $\xi_i$ , 而其余坐标是 0. 因此  $\sum_1^n \xi_i e_i = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . 所以, 如果  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , 則  $x$  可写成向量  $e_i$  的“綫性組合”  $\sum \xi_i e_i$ . 这个关系还指出:如果  $\sum \xi_i e_i = \sum \eta_i e_i$ , 則  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ . 从而  $\xi_i = \eta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 这就肯定了 F 里的唯一性.

性質 A1—A4 說明:  $\Delta^{(n)}$  在加法合成下是交換羣. 性質 S1—S4 是用  $\Delta$  的元作乘法及这个合成与加法合成間的关系的性質. 性質 F 是有限性基本条件.

今用这些性質来定义一个抽象向量空間. 抽象向量空間是

个代数系，由 1) 一个交换羣  $\mathfrak{R}$  (它的合成記作  $+$ )，2) 一个除环  $\Delta$  及 3) 对于所有二维组  $(\rho, x)$  定义的一个函数所組成，这里  $\rho \in \Delta, x \in \mathfrak{R}$ ，而这个函数的值  $\rho x \in \mathfrak{R}$ ，并且适合 S1—S4。仿照  $n$  维组的几何情形，我們把  $\mathfrak{R}$  的元称为向量，而  $\Delta$  的元叫做純量。在討論中，通常重点放在  $\mathfrak{R}$  上，因此就用不很严格的說法，叫  $\mathfrak{R}$  做“除环  $\Delta$  上向量空間”。(严格地說， $\mathfrak{R}$  只是向量空間的羣的部分)。如果于其它假設外，F 也成立，我們說  $\mathfrak{R}$  是有限維的，或  $\mathfrak{R}$  在  $\Delta$  上拥有有限基。

由  $\Delta^{(n)}$ ,  $\Delta$  及上面定义的乘法  $\rho x$  所构成的代数系是有限維向量空間的一个例子。下面我們將要叙述环論里产生向量空間的一个情况。令  $\mathfrak{R}$  是带恆等元素 1 的一个任意环，并且假設  $\mathfrak{R}$  含有一个除环  $\Delta$ ，这个环含有 1。当  $\rho \in \Delta$  而  $x \in \mathfrak{R}$  时，我們取环的积  $\rho x$  为积  $\rho x$ ；于是，S1—S3 是乘法的分配律与結合律的結果，并且因为  $\Delta$  的恆等元素就是  $\mathfrak{R}$  的恆等元素，所以 S4 成立。于是，加法羣  $\mathfrak{R}$ ，除环  $\Delta$  及乘法  $\rho x$  构成一个向量空間。这个空間可以是有限維的，也可以不是有限維的。例如，如果  $\mathfrak{R}$  是复数域，而  $\Delta$  是实数子域，則  $\mathfrak{R}$  是有限維的；这因为任意复数可借“向量” 1,  $\sqrt{-1}$  有一种方法而且只有一种方法写成  $\xi + \eta\sqrt{-1}$  的形状。这种类型的另一个例子是  $\mathfrak{R} = \Delta[\lambda]$ ，它是系数在除环  $\Delta$  上含有超越元素(不定量)  $\lambda$  的多項式环。我們将会知道，这个向量空間不是有限維的(参看习题 3 的第 1 題)。同样，我們可把多項式环  $\Delta[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$  看作一个  $\Delta$  上向量空間，这里  $\lambda_i$  是代数无关元素(或无关不定量)。

向量空間的其它例子可由上面定义的各个空間的子空間得出。令  $\mathfrak{R}$  是  $\Delta$  上任意向量空間，并且令  $\Theta$  是  $\mathfrak{R}$  的一个子集合，它是一个子羣，并且在  $\Delta$  的元素的乘法下封閉，这就是說：如果  $y \in \Theta$ ，并且  $\rho$  是  $\Delta$  里任意元素，則  $\rho y \in \Theta$ 。于是， $\Theta$ ,  $\Delta$  及乘法  $\rho y$  构成的代数系显然是一个向量空間；这因为 S1—S4 在  $\mathfrak{R}$  里成立时，在子集合  $\Theta$  里显然也成立。我們把它叫做給定向量空間  $\mathfrak{R}$  的一个子空間，并且也不严格地把  $\Theta$  叫做  $\mathfrak{R}$  的一个子空間。例

如, 令  $\mathfrak{R} = \Delta[\lambda]$ . 并且令  $\mathfrak{S}$  是次数  $< n$  的多項式所成的子集合, 則易見  $\mathfrak{S}$  是一个子空間, 因为次数  $< n$  的任意多項式有一种方法而且只有一种方法用多項式  $1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}$  的綫性組合表出, 所以  $\mathfrak{S}$  是有限維的.

## 習 題 1

1. 証明: 二次齐次多項式  $\sum_{i < j} a_{ij} \lambda_i \lambda_j (a_{ij} \in \Delta)$  的全体  $\mathfrak{S}$  是  $\Delta[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$  的一个有限維子空間.

**2. 右向量空間** 在本章开始时, 我們已指出  $n$  維組的代数系  $\Delta^{(n)}$  也可以对于加法及用純量右乘的乘法来討論, 这就引导我們来定义右向量空間的概念. 右向量空間是由一个交換羣  $\mathfrak{R}'$ , 一个除环  $\Delta$  及二維組  $(\rho, x')$  的一个函数构成, 这里  $\rho \in \Delta$ ,  $x' \in \mathfrak{R}'$ , 这个函数的值  $x'\rho \in \mathfrak{R}'$ , 并且适合

$$S'1 \quad (x + y')\alpha = x'\alpha + y'\alpha.$$

$$S'2 \quad x'(\alpha + \beta) = x'\alpha + x'\beta.$$

$$S'3 \quad x'(\alpha\beta) = (x'\alpha)\beta.$$

$$S'4 \quad \text{对于所有 } x' \in \mathfrak{R}', \quad x'1 = x'.$$

根据这个定义得来的理論显然与左向量空間的理論是平行的. 但要知道, 如果除环  $\Delta$  不是交換环, 則  $\Delta$  上右向量空間就不能看作一个  $\Delta$  上左向量空間. 这因为, 如果用  $\alpha x'$  代替  $x'\alpha$ , 則由  $S'3$  得

$$(\alpha\beta)x' = x'(\alpha\beta) = (x'\alpha)\beta = \beta(\alpha x').$$

因此要  $S3: (\beta\alpha)x' = \beta(\alpha x')$  成立, 只能对于一切  $x'$  有

$$[(\alpha\beta) - (\beta\alpha)]x' = 0.$$

由这个結果及  $S4$  可推出:  $\alpha\beta = \beta\alpha$  对于所有  $\alpha, \beta$  成立.

另一方面, 令  $\Delta'$  是与  $\Delta$  反同构的一个除环, 并且令  $\alpha \rightarrow \alpha'$  是  $\Delta$  到  $\Delta'$  上的任意反同构. 如果  $\mathfrak{R}'$  是  $\Delta$  上一个右向量空間, 則  $\mathfrak{R}'$  可看作  $\Delta'$  上一个左向量空間. 这可由規定  $\alpha'x'$  就是  $x'\alpha$  而得出. 此时,

$$(\alpha'\beta')x' = (\beta\alpha)'x' = x'(\beta\alpha) = (x'\beta)\alpha = (\beta'x')\alpha = \alpha'(\beta'x'),$$

故能适合 S3. 其它法则也可直接验证.

**3.  $\mathfrak{o}$ -模** 在着手系统的讨论有限维向量空间前, 我们要简短地就扩充为模来讲一下, 这在此后是极有用的. 这种推广是在定义内用带恒等元素的任意环  $\mathfrak{o}$  代替除环  $\Delta$ . 所以, 我们定义一个(左)  $\mathfrak{o}$ -模为一个代数系, 由一个交换羣  $\mathfrak{R}$ , 一个带恒等元素的环  $\mathfrak{o}$  及二元组  $(\rho, x)$  的一个函数构成, 这里  $\rho \in \mathfrak{o}, x \in \mathfrak{R}$ . 而函数的值  $\rho x \in \mathfrak{R}$ , 并且适合 S1—S4<sup>1)</sup>. 由这个定义显见向量空间只是一个  $\Delta$ -模, 这里  $\Delta$  是一个除环.

在向量空间这一特殊情形外, 下面叙述  $\mathfrak{o}$ -模的一个重要例子: 令  $\mathfrak{R}$  是 (用加法合成的) 任意交换羣, 并且令  $\mathfrak{o}$  是整数环. 如果  $x \in \mathfrak{R}$ , 而  $\alpha \in \mathfrak{o}$ , 我们定义

$$\alpha x = \begin{cases} x + x + \cdots + x, & \text{这里 } \alpha > 0, \text{ 有 } \alpha \text{ 项;} \\ 0, & \text{这里 } \alpha = 0; \\ -(x + x + \cdots + x), & \text{这里 } -\alpha > 0, \text{ 有 } -\alpha \text{ 项.} \end{cases}$$

于是, S1—S4 是熟知的  $\mathfrak{R}$  里倍数律.

我们也知道, 带恒等元素的任意环  $\mathfrak{o}$  可看作一个  $\mathfrak{o}$ -模, 这时取  $\mathfrak{o}$  的加法羣为羣的部分  $\mathfrak{R}$ , 并定义  $ax (a \in \mathfrak{o}, x \in \mathfrak{R})$  为环的积. 性质 S1—S4 是乘法的结合律、分配律及恒等元素律的直接结果.

如向量空间情形一样, 如果模  $\mathfrak{R}$  的子集合  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  的一个子羣, 关于以  $\mathfrak{o}$  的随意元素所作的乘法是封闭的, 则  $\mathfrak{S}$  决定一个子模. 今令  $S = (x_a)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个随意子集合, 并令  $[S]$  表示如

$$(2) \quad \xi_1 x_{a_1} + \xi_2 x_{a_2} + \cdots + \xi_m x_{a_m}$$

形式的和的全体, 这里  $\xi_i$  是  $\mathfrak{o}$  里的随意元素, 而  $x_{a_i}$  是  $S$  里的随意元素. 我们断定  $[S]$  是一个子模. 显然  $[S]$  在加法下及用  $\mathfrak{o}$  的元素作乘法下是封闭的. 我们也易知 (习题 2 的第 1 题):  $0x = 0$  及  $(-\xi)x = -\xi x$  在任意模里成立, 且可推得  $[S]$  含有 0 及  $[S]$  里任意元素的负元素. 故  $[S]$  是  $\mathfrak{R}$  的一个子模. 我们还知道,  $[S]$

1) 这个定义与通常的定义稍有出入的地方是在于: 通常定义内  $\mathfrak{o}$  不必带恒等元素, 而只假定适合 S1—S3. 由于本书只着重带有恒等元素的环, 所以这里作这样的改变. 有  $\mathfrak{o}$ -模显然可由以 S'1—S'4 代替 S1—S4 而得.



含有  $S$  的元素  $x_\alpha = 1x_\alpha$ , 并且  $\mathfrak{R}$  里含有  $S$  的每个子模都含有  $[S]$ . 由于这些性质, 我們說:  $[S]$  是由集合  $S$  生成的子模.

如果  $[S] = \mathfrak{R}$ , 則集合  $S$  叫做  $\mathfrak{R}$  的一个生成元素集合. 如果对于某个有限集合  $S = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ,  $\mathfrak{R} = [e_1, e_2, \dots, e_n]$ , 則說  $\mathfrak{R}$  是有限生成的模. 如果有一个生成元素集合  $S$  存在, 使每个  $x$  有一个而且只有一个方法写成形状  $\sum \xi_i e_i, (e_i \in S)$ , 則  $\mathfrak{R}$  叫做一个自由模, 而集合  $S$  叫做一个基. 因此, 条件 F 說明: 一个有限維向量空間是帶有有限基的一个自由  $\Delta$ -模.

对于任意的  $n$ , 容易作出帶有  $n$  个基元素的一个自由  $\mathfrak{o}$ -模; 它的作法与  $\Delta^{(n)}$  的作法相同. 令  $\mathfrak{o}^{(n)}$  表示  $n$  维组  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  的全部, 这里  $\xi_i \in \mathfrak{o}$ . 加法及用  $\mathfrak{o}$  的元素作的乘法都与前面的定义相同. 如果  $e_i$  用 (1) 来定义, 則也象  $\Delta^{(n)}$  的情形, 可以看到这些元素是  $\mathfrak{o}^{(n)}$  的一个基.

今就  $\mathfrak{o}$ -模叙述等价的基本概念. 令  $\mathfrak{R}$  及  $\bar{\mathfrak{R}}$  是对于同一个环  $\mathfrak{o}$  定义的两个  $\mathfrak{o}$ -模. 如果有  $\mathfrak{R}$  到  $\bar{\mathfrak{R}}$  上的一个 1—1 对应  $x \rightarrow \bar{x}$  存在, 使

$$(3) \quad \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}, \quad \overline{\alpha x} = \alpha \bar{x},$$

則說  $\mathfrak{R}$  与  $\bar{\mathfrak{R}}$  是  $\mathfrak{o}$ -同构的, 或仅說等价的. 因此,  $x \rightarrow \bar{x}$  是羣  $\mathfrak{R}$  与  $\bar{\mathfrak{R}}$  間一个同构, 对于所有  $\alpha$  与  $x$  适合  $\overline{\alpha x} = \alpha \bar{x}$ . 这样一个映照叫做一个  $\mathfrak{o}$ -同构或等价.

如果  $x = \sum \alpha_i e_i$ , 則由 (3) 得

$$\bar{x} = \overline{\sum \alpha_i e_i} = \sum \overline{\alpha_i e_i} = \sum \alpha_i \bar{e}_i.$$

所以, 如果元素  $e_i$  是  $\mathfrak{R}$  的生成元素, 則对应元素  $\bar{e}_i$  是  $\bar{\mathfrak{R}}$  的生成元素. 如果  $\sum \alpha_i \bar{e}_i = \sum \beta_i \bar{e}_i$ , 則  $\sum \alpha_i e_i = \sum \beta_i e_i$ . 由此可見, 如果  $\mathfrak{R}$  是帶有基  $e_i$  的一个自由模, 則  $\bar{\mathfrak{R}}$  是帶有基  $\bar{e}_i$  的自由模. 这些論述解释了等价模有相同性质的一般原理, 故在討論中毋須加以区别.

今設  $\mathfrak{R}$  及  $\bar{\mathfrak{R}}$  是两个自由  $\mathfrak{o}$ -模, 并設这两个模的基元素都有  $n$  个. 令  $\mathfrak{R}$  的基是  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 而  $\bar{\mathfrak{R}}$  的基是  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ . 如果  $x$  是  $\mathfrak{R}$  的任意元素, 写出  $x = \sum \xi_i e_i$ , 并把它与  $\bar{\mathfrak{R}}$  的元素  $\bar{x} =$

$\sum \xi_i \bar{e}_i$  对应起来。因为  $e_i$  及  $\bar{e}_i$  都是基，所以这个对应是  $\mathfrak{R}$  到  $\bar{\mathfrak{R}}$  上的 1—1 对应。此外，如果  $y = \sum \eta_i e_i$ ，则  $\bar{y} = \sum \eta_i \bar{e}_i$ ；由于  $x + y = \sum (\xi_i + \eta_i) e_i$ ，故

$$\overline{x + y} = \sum (\xi_i + \eta_i) \bar{e}_i = \sum \xi_i \bar{e}_i + \sum \eta_i \bar{e}_i = \bar{x} + \bar{y}.$$

还有

$$\overline{\alpha x} = \sum (\alpha \xi_i) e_i = \alpha \sum \xi_i \bar{e}_i = \alpha \bar{x}.$$

所以， $\mathfrak{R}$  与  $\bar{\mathfrak{R}}$  等价。这证明了下面的定理。

**定理 1.** 有  $n$  个基元素的任意两个自由  $\mathfrak{o}$ -模是等价的。

特别是，我們知道，有  $n$  个基元素的任意有限维向量空间等价于  $n$  维组的空間  $\Delta^{(n)}$ 。这证明了前面的断言：有限维向量空间的研究与具体代数系  $\Delta^{(n)}$  的研究是等价的<sup>1)</sup>。

## 習 題 2

1. 証明下列关于任意  $\mathfrak{o}$ -模的法則： 1)  $\alpha 0 = 0$ , 2)  $\alpha(-x) = -\alpha x$ , 3)  $0x = 0$ , 4)  $(-\alpha)x = -\alpha x$ .

2. 証明：如果  $\mathfrak{o}$ -模的任意子集合关于加法及用  $\mathfrak{o}$  的元素作的乘法封閉，則这个子集合是一个子模。

3. 証明：如果  $\mathfrak{R}$  是一个向量空間，則  $\alpha x = 0$  必須  $\alpha = 0$  或  $x = 0$ 。

**4. 綫性相关** 从現在起，除非另作声明外， $\mathfrak{R}$  总是表示带有基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  的  $\Delta$  上一个有限维向量空間。我們易知， $\mathfrak{R}$  的基不是唯一决定的。例如， $e_1 + e_2, e_2, e_3, \dots, e_n$  是另一个基，并且如果  $\alpha \neq 0$ ，則  $\alpha e_1, e_2, \dots, e_n$  也是一个基。下一节我們要証的一个基本定理是：任意一个基里向量的个数都相同。所以个数  $n$  是不变的，我們叫它做  $\Delta$  上  $\mathfrak{R}$  的維数。为着給这个定理的証明作出必要的准备，今来討論向量的綫性相关这一个基本概念。

如果  $S$  是向量的一个集合，而向量  $x \in [S]$ ，我們說  $x$  是綫性依赖于  $S$ 。这等价于說： $\Delta$  里有适宜的  $\xi_i$  与  $S$  里有适宜的  $x_i$  使  $x = \sum_{i=1}^m \xi_i x_i$ 。这証明了下列綫性相关的显著性質中的第一个：

1) 如果  $x$  是綫性依赖于  $S$ ，則  $x$  是对于  $S$  的一个有限子集合綫性

1) 模論的較完备敘述，見本书第一卷的第六章。但这里的討論适合于当前的目的。

相关的: 2)  $x$  是綫性依赖于集合  $S = (x)$ ; 3) 如果  $x$  是綫性依赖于  $S$ , 而  $T$  是含有  $S$  的一个集合, 则  $x$  是綫性依赖于  $T$ ; 4) 如果  $x$  是綫性依赖于  $S$ , 并且每个  $x_\alpha \in S$  是綫性依赖于集合  $T$ , 则  $x$  是綫性依赖于  $T$ .

如果对于向量  $x_1, x_2, \dots, x_m$  在  $\Delta$  里有不全为 0 的  $\beta_i$  存在使  $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m = 0$ , 则說  $x_1, x_2, \dots, x_m$  是綫性相关的. 因为  $\beta x = 0$  的充要条件是  $\beta = 0$  或  $x = 0$ , 所以由单独一个向量  $x$  构成的集合是綫性相关的充要条件是  $x = 0$ . 如果  $m > 0$ , 而  $x_i$  是綫性相关的, 则可假設其中一个系数, 譬如  $\beta_m \neq 0$ . 于是,

$$x_m = -\beta_m^{-1} \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i x_i = \sum (-\beta_m^{-1}) \beta_i x_i,$$

因而  $x_m$  是綫性依赖于  $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ . 反过来, 如果  $x_m$  是綫性依赖于  $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ , 则向量  $x_1, x_2, \dots, x_m$  是綫性相关的. 故含有一个以上向量的集合是綫性相关的集合必須而且只須集合里有一个向量是綫性依赖于其余向量. 如果  $r \leq m$ , 并且  $x_1, \dots, x_r$  是一个綫性相关的集合, 则  $x_1, \dots, x_m$  也是一个綫性

相关的集合. 这因为, 如果  $\sum_{i=1}^r \beta_i x_i = 0$ , 则在取  $\beta_{r+1} = \dots = \beta_m = 0$  时, 也有  $\sum_{i=1}^m \beta_i x_i = 0$ .

如果  $x_1, \dots, x_m$  不是綫性相关的, 则說这些向量是綫性无关的. 关于綫性相关的集合的最后一个性質可用下列形式来叙述: 綫性无关的集合的任意非空子集合是一个綫性无关的集合. 特别是, 在一个綫性无关的集合里每个向量必須  $\neq 0$ .

下列性質是經常用到的, 所以就作为引理.

**引理 1.** 如果  $x_1, x_2, \dots, x_m$  是綫性无关的, 而  $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}$  是綫性相关的, 则  $x_{m+1}$  是綫性依赖于  $x_1, \dots, x_m$ .

証 因为  $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m + \beta_{m+1} x_{m+1} = 0$ , 其中一定有些  $\beta_k \neq 0$ . 如果  $\beta_{m+1} = 0$ , 就推得  $x_1, \dots, x_m$  是綫性相关

的,这与假设矛盾. 因此  $\beta_{m+1} \neq 0$ . 我們可就  $x_{m+1}$  解出,而得用  $x_1, \dots, x_m$  表达的式子.

我們还需要下列的引理.

**引理 2.** 令  $x_1, x_2, \dots, x_m$  是  $m > 1$  个向量的集合, 并且定义

$$x'_i = x_i (i = 1, 2, \dots, m-1), x'_m = x_m + \rho x_1,$$

則  $x_1, \dots, x_m$  是綫性相關的必須而且只須  $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$  是綫性相關的.

**証** 假定  $x_i$  是綫性无关的, 并且令  $\beta_i$  是  $\Delta$  的元素能使  $\sum \beta_i x'_i = 0$ . 于是,

$$\begin{aligned} & \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{m-1} x_{m-1} + \beta_m (x_m + \rho x_1) \\ &= (\beta_1 + \beta_m \rho) x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m = 0, \end{aligned}$$

由此得  $\beta_1 + \beta_m \rho = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$ , 亦即所有  $\beta_i = 0$ . 这証明了  $x'_i$  是綫性无关的. 反过来, 因为  $x_i = x'_i (i = 1, 2, \dots, m-1)$ , 而  $x_m = x'_m - \rho x'_1$ ; 所以, 这两个向量集合間的关系是一种对称关系; 因此可知: 如果  $x'_i$  是綫性无关的, 則  $x_i$  也是綫性无关的.

我們显然可把这个引理推广, 而証明: 如果两个集合  $x_1, x_2, \dots, x_m$  及  $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$  里,  $x'_1 = x_1$ , 而  $x'_j = x_j + \rho_j x_1 (j = 2, \dots, m)$ , 則这两个集合都是相关的集合, 或都是无关的集合; 这因为, 我們可从第一个集合經過一系列引理 2 型的代換而得出第二个集合.

現在臨到討論向量空間理論的一个基本結果:

**定理 2.** 如果  $\mathfrak{R}$  有一組  $n$  个向量的基, 則  $\mathfrak{R}$  里任意  $n+1$  个向量是綫性相關的.

**証** 我們对于  $n$  施行归納法証明. 令  $e_1, e_2, \dots, e_n$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基, 并且令  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  是  $\mathfrak{R}$  里向量. 当  $n = 1$  时,  $x_1 = \alpha_1 e_1, x_2 = \alpha_2 e_1$ ; 因此, 或是  $x_1 = 0$ , 或是  $x_2 = \alpha_2 \alpha_1^{-1} x_1$ . 所以, 定理成立. 今設这个定理对于有  $n-1$  个向量为基的空間已經証实. 假定  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  是綫性无关的, 并令

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \cdots + \alpha_{1n}e_n \\
 x_2 &= \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \cdots + \alpha_{2n}e_n \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

$$x_{n+1} = \alpha_{n+1,1}e_1 + \alpha_{n+1,2}e_2 + \cdots + \alpha_{n+1,n}e_n$$

是各个  $x$  通过基的表达式。我們可假定  $x_1 \neq 0$ ；于是，可假定  $\alpha_{1i}$  中有一个  $\neq 0$ ，譬如說， $\alpha_{1n} \neq 0$ 。則集合  $x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n+1}$  是一个綫性无关的集合，这里  $x'_1 = x_1$ ，而  $x'_j = x_j - \alpha_{jn}\alpha_{1n}^{-1}x_1 (j > 1)$ 。由此得  $x'_2, x'_3, \cdots, x'_{n+1}$  是綫性无关的。但由(4)知，这些  $x'_j$  不含有  $e_n$ ，亦即  $x'_j \in \Theta \equiv [e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}]$ 。因为  $e_i (i \leq n-1)$  构成  $\Theta$  的一个基，这与归納法假設矛盾。这就完成了定理的証明。

**注意** 1) 因为向量的綫性无关的集合的任意非空子集合是一个綫性无关的集合，故由定理 2 显然可推得：帶有一組  $n$  个向量的基的空間里，任意  $r > n$  个向量是綫性相关的。

2) 令  $S$  是向量的集合，并且令  $x_1, x_2, \cdots, x_r$  是  $S$  里綫性无关向量，則或每个集合  $(x_1, x_2, \cdots, x_r, x)$  是綫性相关的，这里  $x \in S$ ，或存在一个  $x_{r+1} \in S$  使  $(x_1, x_2, \cdots, x_{r+1})$  是綫性无关的。同理或每个集合  $(x_1, x_2, \cdots, x_{r+1}, x)$  是綫性相关的，这里  $x \in S$ ，或存在一个  $x_{r+2} \in S$  使  $(x_1, x_2, \cdots, x_{r+2})$  是綫性无关的。这样进行有限次后，得到  $S$  的一个綫性无关的集合  $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ ，( $x_i \in S$ )，使  $S$  的任意更大些的子集合是綫性相关的。所以，向量的集合  $S$  的任意綫性无关的子集合可嵌入  $S$  的一个最大綫性无关的子集合里。

3) 定理 2 的証法可用以檢驗給定的有限集合  $x_1, x_2, \cdots, x_m$  的綫性相关。如果  $x_1 = 0$ ，則集合一定是相关的。否則，我們可用  $x_1, x'_2, \cdots, x'_m$  代替这个集合，这里  $x_1$  譬如說含有  $e_n$ ，而其余  $x'_i$  就沒有含着它，因此第二个集合是綫性无关的必須而且只須原来集合是綫性无关的。至此，我們容易知道，因为  $x_1$  含有  $e_n$ ，而  $x'_i$  沒有含着它，所以  $x_1, x'_2, \cdots, x'_m$  是綫性无关的必須而且只須  $x'_2, x'_3, \cdots, x'_m$  是綫性无关的。这样就把問題归結到在帶有  $n-1$  个向量的基的空間里檢驗  $m-1$  个向量的綫性相关的問題了。

### 習題 3

- ## 性方程組

(5)

組  $\sum a_{ij} \xi_j = 0$  証明類似的結果).

是綫性无关的,这因为,如果  $\sum \beta_i e_i = 0$ , 則

$$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n = 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_n.$$

此,  $m = n$ . 这证明了下列的基本定理.

**定理 3.**  $\mathcal{R}$  的任意基含有  $n$  个向量.

上  $\mathfrak{R}$  的維數.

$e_1, \cdots, e_n$  给出  $\mathfrak{R}$  的一个基  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n$ . 所以, 等价的向量空

間有同一維數。特別是, 如果  $m \neq n$ , 則空間  $\Delta^{(m)}$  與  $\Delta^{(n)}$  不是等价的。

其次, 我們証明下面的定理。

**定理 4.** 如果  $f_1, f_2, \dots, f_r$  是綫性無關向量, 則我們可从基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  里选出  $n-r$  个向量补充到这些向量中去, 而得一个基。

**証** 就集合  $(f_1, f_2, \dots, f_r; e_1, e_2, \dots, e_n)$  來說, 我們可在其中选出含有  $f_i$  的一个最大綫性无关的集合  $(f_1, f_2, \dots, f_r; e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_h})$ 。如果把任意一个  $e$  添到这个集合中去, 就得一个綫性相关的集合。故由 §4 的引理 1 知, 每个  $e_i$  是对于集合  $(f_1, \dots, f_r; e_{i_1}, \dots, e_{i_h})$  綫性相关的。所以, 任意  $x$  是对于这个集合綫性相关的, 而这个集合是一个基。

所补充的  $e$  的个数  $h$  是  $n-r$ 。特別是, 我們知道, 如果  $r=n$ , 則  $f_i$  构成一个基。

次設向量  $f_1, f_2, \dots, f_m$  是生成元素。我們由这个集合里选取一个最大綫性无关的子集合, 并且假定向量的記法会使这个子集合里的向量是  $f_1, f_2, \dots, f_r$ , 于是, 对于任意的  $i$ ,  $(f_1, f_2, \dots, f_r, f_i)$  是綫性相关的集合, 所以  $f_i$  是綫性依赖于  $f_1, f_2, \dots, f_r$ , 因此每个  $x$  也是这样。故这个子集合是一个基; 由定理 3 知,  $r=n$ 。故知: 生成元素的任意集合至少含有  $n$  个元素, 并且含有构成一个基的  $n$  个元素的子集合。

#### 習 題 4

1. 如果  $f_1 = (1, -1, 2, 3)$ ,  $f_2 = (3, 0, 4, -2)$ , 求向量  $f_3$  及  $f_4$  使  $f_1, f_2, f_3, f_4$  构成一个基。

2. 在下列向量集合里求一个最大綫性无关的子集合:  $(2, -3, 0, 4)$ ,  $(-1, \frac{1}{2}, 0, -2)$ ,  $(1, -1, 2, 1)$ ,  $(6, -7, 8, 8)$ 。

3. 令  $\Delta$  是一个可除环, 証明: 任意有限生成的  $\Delta$ -模是一个有限維向量空間。

**6. 基及陣** 在目前討論向量的有限集合里, 这些向量的次序也看作重要的; 所以我們考虑有序集合。特別是基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  与基  $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}$  間的区别, 这里  $i_1, i_2, \dots, i_n$  是  $1, 2, \dots, n$  的一个排列。令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是一个特殊有序集合, 它构成

一个 $\Delta$ , 并令  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  是任意向量的一个有序集合. 命  $x_i = \sum_1^n \alpha_{ij} e_j$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ); 则元素  $\alpha_{ij}$  是唯一决定的. 于是, 陣

$$(6) \quad (\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rn} \end{bmatrix}$$

由有序集合  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  及有序基  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  唯一决定. 这个陣我們叫做  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  关于  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的陣.

这里需要引用关于陣乘法的基本动作<sup>1)</sup>. 令  $(\alpha)$  是元素在  $\Delta$  里的一个  $r \times n$  陣 ( $r$  行,  $n$  列). 与前面一样, 我們以  $\alpha_{ij}$  表示在第  $i$  行与第  $j$  列交点处 (亦即  $(i, j)$ -位置) 的元素. 同样, 令  $\beta$  是一个  $n \times m$  陣, 它的元素  $\beta_{jk}$  在  $\Delta$  里. 我們定义积  $(\alpha)(\beta)$  是  $r \times m$  陣, 它的  $(i, k)$ -位置的元素是

$$(7) \quad \sigma_{ik} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{nk}.$$

如果  $(\gamma)$  是元素在  $\Delta$  里的一个  $m \times q$  陣, 则积  $[(\alpha)(\beta)](\gamma)$  与  $(\alpha)[(\beta)(\gamma)]$  定义为  $r \times q$  陣, 它們的  $(i, l)$ -位置的元素顺序为

$$\sum_{j, k} (\alpha_{ij}\beta_{jk})\gamma_{kl}, \quad \sum_{j, k} \alpha_{ij}(\beta_{jk}\gamma_{kl}).$$

故得結合律:  $[(\alpha)(\beta)](\gamma) = (\alpha)[(\beta)(\gamma)]$ .

如果限制于一定大小的方陣, 例如  $n \times n$  陣, 则积仍然是同类型的陣. 因为結合律成立, 所以这种陣的全体  $\Delta_n$  是一个半羣. 我們还易知, 陣

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

是  $\Delta_n$  里的恆等元素, 它对于所有  $(\alpha) \in \Delta_n$  适合  $(\alpha)1 = (\alpha) =$

1) 参看本书第一卷的第二章中的 § 4.



1( $\alpha$ ). 对于一个陣( $\alpha$ ), 如果存在一个( $\beta$ )使( $\alpha$ )( $\beta$ ) = 1 = ( $\beta$ )( $\alpha$ ), 則照半羣的通例叫( $\alpha$ )做一个单位. 这些陣也叫做  $\Delta_n$  里的滿秩陣或正則陣. 我們易証: 带有一个恆等元素的任意半羣的单位的全体成一个羣<sup>1)</sup>. 特別是, 滿秩陣的全体  $L(\Delta, n)$  关于乘法是一个羣. 它也与任意羣一样, ( $\alpha$ )的逆陣( $\beta$ )是唯一决定的, 并且按通例記作( $\beta$ ) = ( $\alpha$ )<sup>-1</sup>.

現在回到有限維向量空間的討論. 令( $e_1, e_2, \dots, e_n$ )与( $f_1, f_2, \dots, f_n$ )是  $\Delta$  上向量空間  $\mathfrak{R}$  的两个有序基, 并且与前此一样, 令( $\alpha$ )是( $f_i$ )关于( $e_i$ )的陣. 次令( $g_1, g_2, \dots, g_n$ )是第三个有序基, 并令

$$(\beta) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

是( $g_1, g_2, \dots, g_n$ )关于( $f_1, f_2, \dots, f_n$ )的陣, 則  $g_i = \sum \beta_{jk} f_k$ . 因为  $f_k = \sum \alpha_{ki} e_i$ , 故

$$g_i = \sum_k \beta_{jk} f_k = \sum_{k,i} \beta_{jk} \alpha_{ki} e_i = \sum_i \gamma_{ji} e_i,$$

这里  $\gamma_{ji} = \sum_k \beta_{jk} \alpha_{ki}$ . 这証明: ( $g_1, g_2, \dots, g_n$ )关于( $e_1, e_2, \dots, e_n$ )的陣是( $\beta$ )与( $\alpha$ )的积( $\beta$ )( $\alpha$ ). 在特殊情形, 如果  $g_i = e_i$ , 則( $\beta$ )( $\alpha$ )是( $e_1, e_2, \dots, e_n$ )关于( $e_1, e_2, \dots, e_n$ )的陣. 因为  $e_i = e_i$ , 显然这个陣必須是恆等陣 1. 所以, ( $\beta$ )( $\alpha$ ) = 1. 把( $e_1, e_2, \dots, e_n$ )与( $f_1, f_2, \dots, f_n$ )对調, 又得( $\alpha$ )( $\beta$ ) = 1. 这就証明了

**定理 5.** 任意有序基( $f_1, f_2, \dots, f_n$ )关于有序基( $e_1, e_2, \dots, e_n$ )的陣是滿秩陣.

反过来, 令( $\alpha$ )是  $L(\Delta, n)$  的一个元素. 令( $\beta$ ) = ( $\alpha$ )<sup>-1</sup>. 定义  $f_i = \sum \alpha_{ij} e_j$ , 則可断定( $f_1, f_2, \dots, f_n$ )是  $\Delta$  上  $\mathfrak{R}$  的一个基.

1) 例如, 参看本书第一卷的第一章中的 § 7.

于是,元素

$$(8) \quad \sum_i \beta_{ki} f_i = \sum_{i,j} \beta_{ki} a_{ij} e_j = \sum_j \delta_{kj} e_j,$$

这里  $\delta_{kj}$  是克伦内克(Kronecker)的  $\delta$ , 就是说: 如果  $k \neq j$ , 则  $\delta_{kj} = 0$ , 而  $k = j$ , 则  $\delta_{kj} = 1$ . 故  $\sum_i \beta_{ki} f_i = e_k$ , 而  $e_k$  是对于  $f_1, \dots, f_n$  线性相关的. 于是, 每个  $x$  对于  $f$  是线性相关的. 因此,  $f_i$  是生成元素; 又因为它们个数是  $n$ , 故它们构成一个基.

于是, 在  $\Delta_n$  里的不同有序基与单位间建立一个 1—1 对应. 如果  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是一个特殊有序基, 则每个有序基可从  $\Delta_n$  中取一个单位  $(\alpha)$  并且定义  $f_i = \sum_j \alpha_{ij} e_j$  而得出.

在右向量空间情形, 显然不难把上面结果复制而得. 我们只须在右空间  $\mathfrak{R}'$  确定  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_r)$  关于基  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  的阵的定义. 这可由写下  $x'_j = \sum_i e'_i \alpha_{ij}$ , 并且定义  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_r)$  关于  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  的阵为  $(\alpha)$  就行了. 于是, 此时的阵是出现于方程  $x'_j = \sum_i e'_i \alpha_{ij}$  的阵的摺转<sup>1)</sup>. 与前此一样, 我们在不同的有序基与  $L(\Delta, n)$  的元素间得出一个 1—1 对应.

## 習 題 5

1. 証明: 如果  $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}), \dots, (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \dots, \alpha_{rn})$  是(左)线性无关的, 则存在有  $\alpha_{ij} (i = r+1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$  使  $(\alpha) = (\alpha_{ij})$  是一个单位.

2. 令  $\Delta$  是含有  $q$  个元素的一个有限除环, 証明:  $\Delta_n$  里单位的个数是

$$N = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1}).$$

**7. 陣論上的应用**  $\Delta_n$  里基与单位间的对应使我们能够把已得的结果用到基上面, 以得出关于元素在除环里的阵的简单而有意义的定理. 我们先証下面的定理.

**定理 6.** 如果  $(\alpha)$  及  $(\beta) \in \Delta_n$ , 並且  $(\beta)(\alpha) = 1$ , 則也有  $(\alpha)(\beta) = 1$ , 而  $(\alpha)$  与  $(\beta)$  都  $\in L(\Delta, n)$ .

**証** 如果  $(\beta)(\alpha) = 1$ , 方程(8)指出: 在  $f_i = \sum_j \alpha_{ij} e_j$  时,  $e_k$

1) 陣  $(\alpha_{ij})$  的摺轉陣是这样的陣, 它的  $(j, i)$ -位置的元是  $\alpha_{ij}$ .

是对于  $f$  綫性相关的. 于是, 上面的論証指出:  $f$  构成一个基. 所以,  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  关于  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的陣  $(\alpha)$  是一个单位. 因为逆陣是唯一的, 所以  $(\beta) = (\alpha)^{-1}$ .

**定理 7** 如果  $(\alpha)$  不是  $\Delta_n$  里一个右(左)零因子, 則  $(\alpha) \in L(\Delta, n)$ .

**証** 我們要証的是: 向量  $f_i = \sum_j \alpha_{ij} e_j$  构成一个基; 而由定理 4 知, 証明  $f$  都是綫性无关的就够了. 所以, 假定  $\sum \beta_i f_i = 0$ , 于是得  $\sum_{i,j} \beta_i \alpha_{ij} e_j = 0$ , 从而有  $\sum_i \beta_i \alpha_{ij} = 0 (j = 1, 2, \dots, n)$ . 所以, 如果

$$(\beta) = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

則  $(\beta)(\alpha) = 0$ . 但  $(\alpha)$  不是右零因子, 故知  $(\beta) = 0$ ; 从而每个  $\beta_i = 0$ . 这就証明  $f_i$  是綫性无关的; 并且关于  $(\alpha)$  不是右零因子这一情形的証明就完成了. 关于  $(\alpha)$  不是左零因子这一情形的証明可由使用右向量空間依同样方法得出. 証明的細节証讀者来做.

其次是, 我們要获得羣  $L(\Delta, n)$  的生成元素的集合. 試考察下列各形状的陣:

$$T_{pq}(\beta) = \begin{bmatrix} & & & q \\ & & & \vdots \\ & 1 & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \dots & \beta & \dots \\ & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & & p \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_p(\gamma) = \begin{bmatrix} & & & p \\ & & & \vdots \\ & 1 & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \vdots \\ & & & \gamma \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \gamma \neq 0.$$

$$P_{pq} = \begin{pmatrix} & & p & & q & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & 1 & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ & & & & 1 & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \\ & & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}$$

这里沒有写出的元素都是 0. 这些陣順序叫做 I, II 及 III 型初等陣. 它們都属于  $L(\Delta, n)$ ; 这因为,  $T_{pq}(\beta)^{-1} = T_{pq}(-\beta)$ ,  $D_p(\gamma)^{-1} = D_p(\gamma^{-1})$ ,  $P_{pq}^{-1} = P_{pq}$ . 現在来証下面的定理.

**定理 8.**  $L(\Delta, n)$  里任意陣  $(\alpha)$  是初等陣的積.

証 首先我們看到, 如果  $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$  是有序基, 則下列各集合也是有序基:

$$(f_1, f_2, \cdots, f_{p-1}, f'_p, f_{p+1}, \cdots, f_n), f'_p = f_p + \beta f_q, q \neq p;$$

$$(f_1, f_2, \cdots, f_{p-1}, f'_p, f_{p+1}, \cdots, f_n), f'_p = \gamma f_p, \gamma \neq 0;$$

$$(f_1, \cdots, f_{p-1}, f'_p, f_{p+1}, \cdots, f_{q-1}, f'_q, f_{q+1}, \cdots, f_n), f'_p = f_p, f'_q = f_q.$$

再則, 这些基关于  $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$  的陣是 I, II 或 III 型初等陣.

今令  $(\alpha)$  是  $L(\Delta, n)$  里任意陣, 并且定义  $f_i = \sum a_{ij} e_j$ , 这里  $e_j$  构成  $n$  維向量空間的一个基, 則  $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$  是一个有序基. 我們要証明: 能够从这个基經過一系列上面指出的各型“初等代換”而达到基  $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ . 如果  $n = 1$ , 就无須証明了; 所以我們可假設这个定理在  $n - 1$  維向量空間是成立的. 因为所有  $f_i$  不能都属于  $[e_2, e_3, \cdots, e_n]$ , 故有一个  $a_{i1} \neq 0$ , 譬如說是  $a_{p1}$ . 把  $f_1$  与  $f_p$  互換, 得到基  $(f'_1, f_2, \cdots, f_{p-1}, f'_p, f_{p+1}, \cdots, f_n)$ , 这里  $f'_1$  用  $e_i$  来表达时,  $e_1$  的系数是非零的. 接着用  $f'_2 = f_2 + \beta f'_1$  代換  $f_2$ , 这里选取  $\beta$  使  $f'_2 \in [e_2, e_3, \cdots, e_n]$ . 循此类推, 經過一系列的初等代換得出基  $(f'_1, f'_2, f'_3, \cdots, f'_n)$ , 这里  $f'_i \in [e_2, e_3, \cdots, e_n]$ . 因为向量  $f'_2, f'_3, \cdots, f'_n$  是綫性无关的, 故构成  $[e_2, e_3, \cdots, e_n]$  的

一个基. 于是, 由归纳法假设知, 我們可通过有限次初等代換达到基  $(f_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ . 然后, 我們得出  $(f'_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ , 这里  $f'_1 = f_1 + \mu e_2$  不含着  $e_2$ . 这样經過有限次代換后得出  $(\gamma e_1, e_2, \dots, e_n)$ , 由此就导出  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . 总结上面的証明可見: 基  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  关于基  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的陣  $(\alpha)$  是接連一系列的基所对应的陣的积; 而这些陣都是初等陣, 故定理成立.

## 習 題 6

1. 把下面的陣写成初等陣的积:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. 验证:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

把这个結果推广, 并应用推广的結果証明: I 及 II 型初等陣就足够生成  $L(\Delta, n)$ .

3. 証明: 如果  $\delta \neq 0$ , 則  $\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{bmatrix}$  是 I 型初等陣的积. 由此証明:  $L(\Delta, n)$  里任意陣可写成  $(\beta)D_n(\gamma)$ , 这里  $(\beta)$  是 I 型初等陣的积, 而  $D_n(\gamma)$  是上面定义过的陣.

**8. 向量集合的秩, 行列式秩** 令  $S = (x_s)$  是向量空間  $\mathfrak{R}$  的一个任意子集合, 并令  $[S]$  表示由  $S$  生成的子空間. 如果  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  是由集合  $S$  里选取的最大綫性无关向量的集合, 于是  $[S]$  里向量是对于  $x_i$  綫性相关的. 所以  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  是  $[S]$  的一个基. 維数不变性的定理指出:  $r$  是由  $S$  唯一决定的, 亦即集合  $S$  的任意两个最大綫性无关子集合有相同的向量个数; 这数目叫做集合  $S$  的秩. 秩  $r$  必然  $\leq n$ ; 而  $r = n$  的充要条件是  $[S] = \mathfrak{R}$ . 这些說明特別指出: 如果  $S = \Theta$  是一个子空間, 則  $\Theta = [S]$  是有限維的, 其維数  $\leq n$ ; 而且只有  $\Theta = \mathfrak{R}$  时  $\Theta$  的維数  $= n$ .

今应用向量集合的秩的概念来研究元素在除环  $\Delta$  里的陣. 令  $(\alpha)$  是元素在  $\Delta$  里的任意  $r \times n$  陣, 并且令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个任意有序基. 引入  $\mathfrak{R}$  的行向量  $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), 并定义  $(\alpha)$  的行秩是集合  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  的秩. 于

是. 虽选取不同的基, 結果总是相同. 这因为, 如果  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  是  $\mathfrak{R}$  (或其他  $n$  維空間) 的另一个基, 則映照  $\sum \xi_i e_i \rightarrow \sum \xi_i f_i$  是一种等价, 它把  $x_i$  映照到  $y_i = \sum_j a_{ij} f_j$ . 所以,  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  的維数等于  $\{y_1, y_2, \dots, y_r\}$  的維数.

仿此, 我們可定义  $(\alpha)$  的列秩. 此时, 我們引入帶有基  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_r)$  的  $r$  維右向量空間  $\mathfrak{R}'$ . 于是我們定义  $(\alpha)$  的列秩是集合  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_r)$  的秩, 这里  $x'_i = \sum_j e'_j a_{ji}$ .  $x'_i$  叫做  $(\alpha)$  的列向量. 我們在后一章里将要証明: 一个陣的两种秩常是相等. 特別在  $\Delta$  是(交換)域  $\Phi$  时, 要証它們相等, 可証明: 这两种秩都与用行列式来定义的另一種秩相等.

我們从子式說起. 設陣  $(\alpha)$  的元素  $a_{ij} \in \Phi$ , 則陣  $(\alpha)$  的子式是从  $(\alpha)$  去掉某些行及列所得的方陣的行列式. 例如, 二阶子式的形状是  $\begin{vmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{vmatrix}$ . 如果  $(\alpha)$  里每个  $(\rho+1)$ -行子式的值都是 0, 而有一个  $\rho$ -行子式  $\neq 0$ , 則說  $(\alpha)$  有行列式秩  $\rho$ . 下面定理使我們能够証明行秩与行列式秩相等. 証明用到了行列式的著名定理.

**定理 9.** 向量  $x_i = \sum_j a_{ij} e_j$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) 是綫性无關的, 必須而且只須  $(\alpha)$  的行列式秩为  $r$ .

証 显然行列式秩  $\rho \leq n$ , 而  $x_i$  是綫性无關的也只有  $r \leq n$ . 故可假定  $r \leq n$ . 先設  $x_i$  是綫性相关的, 則有一个向量, 譬如  $x_1$ , 使  $x_1 = \beta_2 x_2 + \dots + \beta_r x_r$ . 于是,  $a_{1j} = \beta_2 a_{2j} + \beta_3 a_{3j} + \dots + \beta_r a_{rj}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). 故

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} \sum_1^r \beta_k a_{k1} & \sum_2^r \beta_k a_{k2} & \dots & \sum_1^r \beta_k a_{kn} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn} \end{bmatrix}.$$

因为任意  $r$ -行子式的第一行是其他各行的綫性組合, 所以每个  $r$ -行子式等于零. 因此  $\rho < r$ . 反过来, 設  $\rho < r$ , 則把  $(\alpha)$  的行或列作排列显然不变动行列式秩; 但这样排列給出排成某种次序

的  $x$  关于排成某种次序的  $e$  的陣。所以,我們不妨假定

$$\beta = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\rho} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\rho 1} & \alpha_{\rho 2} & \cdots & \alpha_{\rho\rho} \end{bmatrix} \neq 0.$$

令  $\beta_i (i = 1, 2, \cdots, \rho + 1)$  是

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1, \rho+1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2, \rho+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\rho+1, 1} & \alpha_{\rho+1, 2} & \cdots & \alpha_{\rho+1, \rho+1} \end{bmatrix}$$

里  $\alpha_{i, \rho+1}$  的余因子, 則  $\beta_{\rho+1} = \beta \neq 0$ , 而  $\beta_1 \alpha_{1j} + \beta_2 \alpha_{2j} + \cdots + \beta_{\rho+1} \alpha_{\rho+1, j} = 0 (j = 1, 2, \cdots, n)$ . 所以,  $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_{\rho+1} x_{\rho+1} = 0$ , 这里  $\beta_{\rho+1} \neq 0$ , 而  $x_i$  是綫性相关的, 这就完成了定理的証明。

次令  $r$  是随意的, 并且假定向量  $x_1, x_2, \cdots, x_\rho$  是  $x_i$  的集合的一个基。由上面定理知, 在  $(\alpha)$  的前  $\rho$  行里存在有一个非零的  $\rho$ -行子式; 又因为任意  $\rho + 1$  个  $x_i$  是綫性相关的,  $(\alpha)$  里每个  $\rho + 1$ -行子式等于零。故行列式秩等于行秩  $\rho$ 。如果把同样論証施于右向量空間, 則可証列秩等于行列式秩。故在域的情形, 陣的两种秩(行秩及列秩)是相等的。

我們已知: 陣  $(\alpha) \in L(\Phi, n)$  必須而且只須行向量  $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  构成  $\mathfrak{R}$  的一个基, 这里  $x_i = \sum_j \alpha_{ij} e_j$ ; 而后面的条件等价于說:  $(\alpha)$  的行秩是  $n$ 。所以, 上面結果指出:  $(\alpha) \in L(\Phi, n)$  必須而且只須这个陣的行列式在  $\Phi$  里不等于零。这个結果也可以直接証明(參看本书第一卷, 第二章的 § 4 中, 定理 1)。事实上,  $(\alpha)$  的逆陣可按下列法則借行列式简单地列出: 令  $A_{ij}$  是  $(\alpha)$  里元素  $\alpha_{ji}$  的余因子, 并令  $\beta_{ij} = A_{ij} [\det(\alpha)]^{-1}$ , 則  $(\beta_{ij}) = (\alpha)^{-1}$ 。这容易由行列式的展开定理导出, 証明見于本书第一卷, 第二章的 § 4 中。

## 習 題 7

1. 証明: 如果  $\Delta = \Phi$  是可交換的, 并且元素  $\alpha_i$  全不相同, 则

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix} \in L(\Phi, n).$$

(提示: 这个陣的行列式叫做范德曼得 (Vandermonde) 行列式. 証明它的值是非零的.)

2. 証明: 如果  $\Delta = \Phi$  是一个域, 并且  $(\alpha) \in L(\Phi, n)$ , 則轉置陣  $(\alpha)' \in L(\Phi, n)$ .

3. 証明第 2 題的下面逆定理: 如果对于每个  $(\alpha) \in L(\Delta, 2)$  有  $(\alpha)' \in L(\Delta, 2)$ , 則  $\Delta$  是域.

4. 求下面陣的逆陣:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

**9. 商空間**  $\mathfrak{R}$  的任意子空間  $\Theta$  必然是加法羣  $\mathfrak{R}$  的一个子羣. 因为  $\mathfrak{R}$  是可交換的, 我們可定义商羣  $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\Theta$ . 这个羣的元素是陪集  $\bar{x} = x + \Theta$ , 而  $\bar{\mathfrak{R}}$  里合成法是

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}.$$

今令  $\alpha$  是  $\Delta$  的任意元素, 如果  $x \equiv y \pmod{\Theta}$ , 亦即  $x - y = z \in \Theta$ , 則  $\alpha z \in \Theta$ , 故  $\alpha x \equiv \alpha y \pmod{\Theta}$ . 因此, 陪集  $\alpha \bar{x}$  由陪集  $\bar{x}$  及元素  $\alpha \in \Delta$  唯一决定. 我們定义这个陪集是积  $\alpha \bar{x}$ , 并且不难验证:  $\bar{\mathfrak{R}}$ ,  $\Delta$  及合成  $(\alpha, \bar{x}) \rightarrow \alpha \bar{x}$  构成一个向量空間; 而把这个空間叫做  $\mathfrak{R}$  关于子空間  $\Theta$  的商空間.

今令  $(f_1, f_2, \cdots, f_r)$  是  $\Theta$  的一个基, 把它扩张为  $\mathfrak{R}$  的一个基  $(f_1, f_2, \cdots, f_r, f_{r+1}, \cdots, f_n)$ , 我們要証: 陪集  $\bar{f}_{r+1}, \cdots, \bar{f}_n$  是  $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\Theta$  的一个基. 令  $\bar{x}$  是任意陪集, 写下  $x = \sum_1^n \alpha_i f_i$ , 則

$$\bar{x} = \overline{\sum_1^n \alpha_i f_i} = \sum_1^n \overline{\alpha_i f_i} = \sum_1^n \alpha_i \bar{f}_i = \sum_{r+1}^n \alpha_i \bar{f}_i, \text{ 这因为 } i \leq r \text{ 时 } \bar{f}_i =$$

0. 因此,  $(\bar{f}_{r+1}, \cdots, \bar{f}_n)$  是  $\bar{\mathfrak{R}}$  的生成元素集合. 另一方面, 如果  $\sum_{r+1}^n \beta_i \bar{f}_i = 0$ , 則  $\sum_{r+1}^n \beta_i f_i \in \Theta$ , 故  $\sum_{r+1}^n \beta_i f_i = \sum_1^r \gamma_k f_k$ . 由此知所



有  $\beta_i = 0$ . 这就可見  $(\bar{f}_{r+1}, \dots, \bar{f}_n)$  是一个基. 这就証明了:  $\mathfrak{R}$  的維数是  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{S}$  的維数的差.

**10. 子空間的代数** 除环  $\Delta$  上向量空間  $\mathfrak{R}$  的子空間全体  $L$  对于将要定义的两合成构成一个有趣类型的代数系. 先就  $L$  关于集合的包含关系来說, 对于这个关系,  $L$  是一个偏序集合<sup>1)</sup>, 就是說: 对于  $L$  里各对  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$  定义了关系  $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2$ , 而且

1.  $\mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{S}$ ,
2. 如果  $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_2 \supseteq \mathfrak{S}_1$ , 則  $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$ ,
3. 如果  $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2$ , 而  $\mathfrak{S}_2 \supseteq \mathfrak{S}_3$ , 則  $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_3$ .

所以这关系是反身, 反对称与传递的.

次就任意两个子空間  $\mathfrak{S}_1$  及  $\mathfrak{S}_2$  来說, 邏輯的交  $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$  也是一个子空間, 而这个空間关于包含关系起了最大下界的作用, 这就是說:  $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$  含于  $\mathfrak{S}_1$  与  $\mathfrak{S}_2$  里, 并且  $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$  含有每个  $\mathfrak{S}'$ , 它是含于  $\mathfrak{S}_1$  与  $\mathfrak{S}_2$  里的. 两个空間的集合論上的和  $\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$  不一定是一个子空間, 所以我們取由集合  $\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$  生成的空間  $[\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2]$  来代替这个集合, 并且用  $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$  表示这个空間, 而叫它做  $\mathfrak{S}_1$  与  $\mathfrak{S}_2$  的联合. 它具有最小上界的性質:  $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 \supseteq \mathfrak{S}_1$  及  $\mathfrak{S}_2$ , 并且它是含于每个子空間  $\mathfrak{S}$  里, 而  $\mathfrak{S}$  含有  $\mathfrak{S}_1$  及  $\mathfrak{S}_2$  的. 我們易知, 这些性質是  $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$  的特性, 就是說: 具有这些性質的任意子空間与  $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$  是迭合的. 由这个特性或由  $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$  即为  $[\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2]$  的定义立知, 这个空間是如  $y_1 + y_2$  形的向量的集合, 这里  $y_i \in \mathfrak{S}_i$ .

如果一个偏序集合里任意两个元素都有一个最大下界与一个最小上界时, 这个偏序集合叫作格. 所以  $L$  叫作空間  $\mathfrak{R}$  的子空間的格. 我們在本节里将导出这个格的基本性質. 首先是下列各性質在任意格中都成立.

**1. 結合律及交換律** 对于合成  $\cap$  及  $+$  成立.

这易由定义得出. 关于  $\cap$  的法則讀者自然是熟悉的.

其次, 是格  $L$  的一些特有性質.

---

1) 关于本节所述的概念, 参看本书第一卷第七章.

2.  $L$  里存在有一个零元素, 亦即元素  $0$ , 使对于所有  $\mathfrak{S}$ ,

$$\mathfrak{S} \cap 0 = 0, \quad \text{及} \quad \mathfrak{S} + 0 = \mathfrak{S}.$$

只由  $0$  向量构成的子空间具有这些性质. 与此相对的整体空间  $\mathfrak{R}$  有“全”元素的作用, 亦即对于所有  $\mathfrak{S}$  使

$$\mathfrak{S} + \mathfrak{R} = \mathfrak{R} \quad \text{及} \quad \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{S}.$$

分配律  $\mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3) = \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3$  在  $L$  里一般不能成立. 例如, 令  $x_1$  及  $x_2$  是无关向量, 并且令  $\mathfrak{S}_1 = [x_1]$ ,  $\mathfrak{S}_2 = [x_2]$  及  $\mathfrak{S}_3 = [x_1 + x_2]$ , 则  $\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3 = [x_1, x_2]$ , 故  $\mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3) = \mathfrak{S}_1$ . 但  $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = 0$ ,  $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3 = 0$ , 故  $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3 = 0$ . 这就可见分配律不成立. 我们将指出较弱的分配律在  $L$  里成立, 这就是下面的法则:

3. 如果  $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2$ , 则  $\mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3) = \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3$ .

証 我們首先知道,  $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 \subseteq \mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3)$  及  $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3 \subseteq \mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3)$ . 所以

$$\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3 \subseteq \mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3).$$

次令  $z \in \mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3)$ , 则  $z = y_1 \in \mathfrak{S}_1$  与  $z = y_2 + y_3$ , 这里  $y_2 \in \mathfrak{S}_2$ ,  $y_3 \in \mathfrak{S}_3$ . 于是,  $y_3 = y_1 - y_2 \in \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1$ . 故  $y_3 \in \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3$ , 而  $z = y_2 + y_3 \in \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3$ . 这证明了  $\mathfrak{S}_1 \cap (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3) \subseteq \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_3$ , 所以 3 成立.

3 能够成立的格叫做模格(或狄得京得(Dedekind)格). 我們要指出  $L$  是一个有余格, 亦即下面性质成立.

4. 对于  $L$  里任意的  $\mathfrak{S}$ , 在  $L$  里存在有一个  $\mathfrak{S}^*$  使

$$\mathfrak{S} + \mathfrak{S}^* = \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}^* = 0.$$

証 如果  $(f_1, f_2, \dots, f_r)$  是  $\mathfrak{S}$  的一个基, 则这些向量是綫性无关的, 因此可用向量  $f_{r+1}, \dots, f_n$  补充以得  $\mathfrak{R}$  的一个基  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ . 命  $\mathfrak{S}^* = [f_{r+1}, f_{r+2}, \dots, f_n]$ , 则  $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}^* = [f_1, f_2, \dots, f_n] = \mathfrak{R}$ . 不仅如此,  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}^*$  里任意向量  $y$  是对于  $f_1, f_2, \dots, f_r$  綫性相关的, 也对于  $f_{r+1}, f_{r+2}, \dots, f_n$  綫性相关的. 因为  $f_1, f_2, \dots, f_n$  是綫性无关的, 所以  $y = 0$ ; 故  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}^* = 0$ .

适合上面条件的子空間  $\mathfrak{G}^*$  叫做  $\mathfrak{R}$  里子空間  $\mathfrak{G}$  的余空間。末了,我們要提到下面的鏈条件在  $L$  里成立:

5. 如果  $\mathfrak{G}_1 \supseteq \mathfrak{G}_2 \supseteq \cdots$  是子空間的一个无限降鏈, 則有一个整数  $r$  存在使  $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{G}_{r+1} = \cdots$ .

如果  $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}_2 \subseteq \cdots$  是子空間的一个无限升鏈, 則有一个整数  $r$  存在使  $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{G}_{r+1} = \cdots$ .

因为子空間的維数是一个非負整数<sup>1)</sup>, 并且因为  $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}'$  可推得  $\dim \mathfrak{G} > \dim \mathfrak{G}'$ , 所以这两个条件是显然成立的, 这里  $\dim \mathfrak{G}$  表  $\mathfrak{G}$  的維数.

### 習 題 8

1. 証明: 如果  $\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$ , 則  $\mathfrak{G}_1 \supseteq \mathfrak{G}_2$ , 或是  $\mathfrak{G}_2 \supseteq \mathfrak{G}_1$ .

2. 証明: 如果  $\dim \mathfrak{G} = r$ , 則任意余空間的維数是  $n - r$ .

3. 証明: 一般維数关系:

$$\dim (\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2) = \dim \mathfrak{G}_1 + \dim \mathfrak{G}_2 - \dim (\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2).$$

4. 証明: 如果  $\mathfrak{G}$  是任意子空間,  $\neq 0$ , 也  $\neq \mathfrak{R}$ , 則  $\mathfrak{G}$  的余空間不只一个.

**11. 无关子空間, 直接和** 下面要談到一个概念, 它是向量的綫性无关概念的一个推广. 令  $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_r$  是  $\mathfrak{R}$  的子空間的有限集合. 如果

$$(9) \mathfrak{G}_i \cap (\mathfrak{G}_1 + \cdots + \mathfrak{G}_{i-1} + \mathfrak{G}_{i+1} + \cdots + \mathfrak{G}_r) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

則說这些子空間是无关的. 如果  $x_1, x_2, \cdots, x_r$  是  $\mathfrak{R}$  里向量, 則它們成为綫性无关的充要条件是: 1)  $x_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \cdots, r$ ); 2) 空間  $[x_i]$  是无关的. 这因为, 設 1) 与 2) 成立, 并且令  $\sum \beta_i x_i = 0$ , 則

$$-\beta_i x_i = \sum_{j \neq i} \beta_j x_j \in [x_i] \cap ([x_1] + \cdots + [x_{i-1}] + [x_{i+1}] + \cdots + [x_r]),$$

由 2) 知  $-\beta_i x_i = 0$ . 因为  $x_i \neq 0$ , 就推得各个  $\beta_i = 0$ . 次設  $x_i$  是綫性无关的, 則必然地各个  $x_i \neq 0$ . 如果

$$x \in [x_i] \cap ([x_1] + \cdots + [x_{i-1}] + [x_{i+1}] + \cdots + [x_r]),$$

1) 零空間的維数取为 0.

則  $x = \beta_i x_i = \sum_{j \neq i} \beta_j x_j$ . 故由  $x_i$  的綫性无关得  $\beta_i = 0$ ; 因此  $x = 0$ .

令  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_r$  是任意无关子空間, 并且令  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \dots + \mathfrak{S}_r$ . 如果  $y \in \mathfrak{S}$ , 則  $y = y_1 + y_2 + \dots + y_r$ , 这里  $y_i \in \mathfrak{S}_i$ . 这个表达式可断定是唯一的; 就是說, 如果还有  $y = y'_1 + y'_2 + \dots + y'_r$ . 这里  $y'_i \in \mathfrak{S}_i$ , 則必有  $y_i = y'_i (i = 1, 2, \dots, r)$ . 这因为, 如果  $\sum y_i = \sum y'_i$ , 令  $z_i = y_i - y'_i \in \mathfrak{S}_i$ , 則  $\sum z_i = 0$ . 于是,

$$-z_i = \sum_{j \neq i} z_j \in \mathfrak{S}_i \cap (\mathfrak{S}_1 + \dots + \mathfrak{S}_{i-1} + \mathfrak{S}_{i+1} + \dots + \mathfrak{S}_r).$$

故  $z_i = 0$ , 而  $y_i = y'_i$ . 这个結果的逆定理也是成立的; 这因为, 如果 (9) 对于有些  $i$  不成立, 則在这个交里有向量  $z_i \neq 0$  存在. 于是,

$z_i = \sum_{j \neq i} z_j$ , 而这个元素在写成空間  $\mathfrak{S}_k$  的元素的和时有两种

不同的表达式了, 这是不合理的. 因此就証明了以下定理.

**定理 10.** 空間  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_r$  是无关的的充要条件为  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \dots + \mathfrak{S}_r$  里每个向量有一个唯一的表达式如  $\sum y_i$  形, 这里  $y_i \in \mathfrak{S}_i$ .

子空間的无关性的另一个重要特征是

**定理 11.** 空間  $\mathfrak{S}_i$  是无关的必須而且只須  $\dim (\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \dots + \mathfrak{S}_r) = \sum \dim \mathfrak{S}_i$ .

証 先設  $\mathfrak{S}_i$  是无关的, 并令  $(f_{1i}, f_{2i}, \dots, f_{n_i i})$  是  $\mathfrak{S}_i$  的一个基. 如果  $\sum_{i,j} \beta_{ji} f_{ji} = 0$ , 則  $\sum_i y_i = 0$ , 这里  $y_i = \sum_j \beta_{ji} f_{ji} \in \mathfrak{S}_i$ .

所以, 对于每个  $i$  有  $0 = y_i = \sum_j \beta_{ji} f_{ji}$ . 因为  $i$  固定时  $f_{ji}$  是綫性

无关的, 故  $\beta_{ji} = 0$ . 这証明了所有  $f_{ji}$  都是綫性无关的. 于是,  $f_{ji}$  构成  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \dots + \mathfrak{S}_r$  的一个基. 它們的个数  $\sum n_i$  是  $\mathfrak{S}$  的维数, 这里  $n_i = \dim \mathfrak{S}_i$ . 故  $\dim \mathfrak{S} = \sum \dim \mathfrak{S}_i$ . 反过来, 設这个維数关系成立, 如前一样令  $f_{ji}$  构成  $\mathfrak{S}_i$  的一个基. 則这些  $f_{ji}$  的个数是  $\sum \dim \mathfrak{S}_i = \dim \mathfrak{S}$ . 另一方面, 这些  $f_{ji}$  是  $\mathfrak{S}$  的生成元素, 故它們构成一个基, 因而是綫性无关的. 由此立知, 如果  $\sum y_i = \sum y'_i$ , 而  $y_i, y'_i \in \mathfrak{S}_i$ , 則  $y_i = y'_i$ . 故  $\mathfrak{S}_i$  是无关的.

如果  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_r$  是无关的子空間, 而  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots + \mathfrak{R}_r$ , 則說  $\mathfrak{R}$  是子空間  $\mathfrak{R}_i$  的直接和, 記做  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_r$ . 在这样情形下,  $\mathfrak{R}$  的每个向量有一种方法而且只有一种方法把它写成子空間  $\mathfrak{R}_i$  里向量的和.

### 習 題 9

1. 証明: 下面的条件是子空間  $\mathfrak{C}_i$  成无关的的充要条件:

$$\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2 = 0, (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) \cap \mathfrak{C}_3 = 0, (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3) \cap \mathfrak{C}_4 = 0, \dots$$

2. 証明: 如果  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_r$ , 并且各个  $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_{i1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_{in_i}$ , 則

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{11} \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_{1n_1} \oplus \mathfrak{R}_{21} \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_{2n_2} \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_{rn_r}.$$

## 第 二 章

### 綫 性 变 換

本章我們討論綫性变換及由这些映照决定的某些代数系。两个特殊型的綫性变換，即向量空間到它自身內的綫性变換及一个空間到一維空間  $\Delta$  內的綫性变換，特饒兴趣。前者构成一个环；而后者叫做綫性函数，构成一个右向量空間。向量空間  $\mathfrak{R}_1$  到向量空間  $\mathfrak{R}_2$  的綫性变換很自然地連帶着  $\mathfrak{R}_2$  上綫性函数的共軛空間到  $\mathfrak{R}_1$  的共軛空間內的折轉綫性变換。我們論述对換映照的性質，討論綫性变換与陣間的关系，还定义了任意綫性变換的秩与跡。末了，討論叫做射影的特殊型綫性变換，并且在这类型的变換与向量空間的直接分解間建立一个联系。

**1. 定义及例子** 实系数多項式的向量空間  $\Phi[\lambda]$  里微分映照  $\phi(\lambda) \rightarrow \phi'(\lambda)$  具有性質

$$[\phi(\lambda) + \psi(\lambda)]' = \phi'(\lambda) + \psi'(\lambda), \quad [\alpha\phi(\lambda)]' = \alpha\phi'(\lambda).$$

这是綫性变換的一个例子。另一个例子是由

$$(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow \xi\lambda + \eta\mu + \zeta\nu$$

定义的  $\Delta^{(3)}$  的映照，这里  $\lambda, \mu, \nu$  是基本除环  $\Delta$  里的固定元素。一般的說，令  $\mathfrak{R}_1$  及  $\mathfrak{R}_2$  是同一除环  $\Delta$  上的向量空間，如果  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  內的一个映照  $A$  对于  $\mathfrak{R}_1$  里所有  $x, y$  及  $\Delta$  里所有  $\alpha$  适合

$$(1) \quad (x + y)A = xA + yA, \quad (\alpha x)A = \alpha(xA),$$

則叫  $A$  做綫性变換。按通例， $xA$  表示元素  $x$  在  $\mathfrak{R}_2$  里的象。我們还把象的集合，亦即象  $xA$  的集合，記作  $\mathfrak{R}_1 A$ 。  $A$  是到  $\mathfrak{R}_2$  內的映照这一說法是容許  $\mathfrak{R}_1 A \subset \mathfrak{R}_2$  (即  $\mathfrak{R}_1 A$  是  $\mathfrak{R}_2$  的真子集合) 的可能性。

綫性变換的概念是  $\mathfrak{o}$ -模  $\mathfrak{R}_1$  到另一个模內的  $\mathfrak{o}$ -同态的概念的

特殊情形；我們用“ $\alpha \in \mathfrak{o}$ ”代替上面定义里的“ $\alpha \in \Delta$ ”即得到推广。1—1 对应的  $\mathfrak{o}$ -同态已在第一章介绍过，这样的映照叫做等价或  $\mathfrak{o}$ -同构， $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  上的  $\mathfrak{o}$ -同构的存在是模  $\mathfrak{R}_i$  的等价的判别准则。

(1) 里第一个条件表明  $A$  是加法羣  $\mathfrak{R}_1$  到加法羣  $\mathfrak{R}_2$  内的一个同态，而第二个条件可解释为  $A$  与  $\alpha$  的可交换性的一种类型。在  $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$  时这样解释很恰当的，这因为，对于每个  $\alpha$  我們可引进映照  $\alpha_l$ ，它把  $x$  映照为  $\alpha x$ 。我們把  $\alpha_l$  叫做由  $\alpha$  决定的純量乘法。显然  $\alpha_l$  是  $\mathfrak{R}$  的一个自同态，亦即  $\mathfrak{R}$  到它自身内的一个同态，这时  $\mathfrak{R}$  作为一个羣来看待。由于  $x(\alpha_l A) = (\alpha x)A$  及  $x(A\alpha_l) = \alpha(xA)$ ，所以  $A$  是向量空間  $\mathfrak{R}$  里一个綫性变换必須而且只須  $A$  是  $\mathfrak{R}$  的一个自同态，而与所有自同态  $\alpha_l$  可交换的。

在向量空間到它自身的綫性变换外，另一种可注意的綫性变换的类型是綫性函数，这是向量空間  $\mathfrak{R}$  到除环  $\Delta$  的一个映照  $x \rightarrow f(x)$ ，它使

$$(2) \quad f(x + y) = f(x) + f(y), f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

这种类型的映照显然可看作  $\mathfrak{R}$  到一維向量空間  $\Delta$  内的綫性变换。这样一維向量空間  $\Delta$  是用  $\Delta$  的加法羣作为羣，用  $\Delta$  作为除环，左乘法  $\alpha \varepsilon$  作为純量乘法而得。元素 1 (或任意非零元素) 是除环  $\Delta$  上向量空間  $\Delta$  的一个基。上面举的第二例就是  $\Delta^{(3)}$  上綫性函数的例。

### 習 題 10

1. 証明：微分映照  $\phi(\lambda) \rightarrow \phi'(\lambda)$  是次数  $< n$  的多項式构成的向量空間  $\mathfrak{R}$  里一个綫性变换。
2. 証明：差算子  $\phi(\lambda) \rightarrow \phi(\lambda + 1) - \phi(\lambda)$  是  $\Phi[\lambda]$  里的一个綫性变换。

**2. 綫性变换的合成** 今述綫性变换的合成方法。必須指出，本节所有結果同样可使用于更一般的模的  $\mathfrak{o}$ -同态情形，但为省事起見，仅就此后最感兴趣的特殊情形叙述它的結果。

先設  $A$  与  $B$  是向量空間  $\mathfrak{R}_1$  到同一空間  $\mathfrak{R}_2$  内的綫性变换。我們用方程

$$(3) \quad x(A+B) = xA + xB.$$

定义  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  内的映照  $A+B$ , 这里  $x$  是  $\mathfrak{R}_1$  里任意向量. 于是, 把象  $xA$  与  $xB$  相加就得到施  $A+B$  于  $x$  的象. 显然  $A+B$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  内的一个(单值)变换. 因为

$$\begin{aligned} (x+y)(A+B) &= (x+y)A + (x+y)B = xA + yA + xB + yB \\ &= xA + xB + yA + yB = x(A+B) + y(A+B), \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} (\alpha x)(A+B) &= (\alpha x)A + (\alpha x)B = \alpha(xA) + \alpha(xB) \\ &= \alpha(xA + xB) = \alpha(x(A+B)), \end{aligned}$$

所以  $A+B$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  内的一个线性变换.

$\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  内的线性变换的全体记作  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ , 我们要证: 这个集合带着上面引进的加法合成是一个交换群. 首先我们知道: 结合律与交换律是成立的, 这因为,

$$\begin{aligned} x[(A+B)+C] &= x(A+B) + xC = xA + xB + xC, \\ x[A+(B+C)] &= xA + x(B+C) = xA + xB + xC; \\ x(A+B) &= xA + xB, \quad x(B+A) = xB + xA, \end{aligned}$$

所以  $(A+B)+C$  与  $A+(B+C)$  对于  $\mathfrak{R}_1$  里任意的  $x$  都有同一的象, 按定义知:  $A+(B+C) = (A+B)+C$ . 同理得  $A+B = B+A$ . 其次, 我们用条件  $x0 = 0$  ( $\mathfrak{R}_2$  里的零向量) 来定义映照  $0$ . 我们易知, 这个映照属于  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ , 并且对于  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  里所有  $A$  有  $A+0 = A = 0+A$ . 所以,  $0$  对于加法合成有恒等元素的作用. 末了, 如果  $A$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  里任意元素, 我们定义  $-A$  是使  $x(-A) = -xA$  的映照. 我们易证:  $-A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ . 因为对于所有  $x$  有  $x(A+(-A)) = xA - xA = 0$ , 所以  $-A$  有  $A$  的逆元素的作用. 这样就完成了  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ ,  $+$  是一个交换群的证明.

其次, 我们引入线性变换的第二种合成. 这是对于  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  里的任意  $A$  与  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3)$  里的任意  $B$  作定义, 而取为施行  $A$  后又施行  $B$  的结果; 依通例我们把这结果记作  $AB$ . 于是, 定义  $x(AB) = (xA)B$ . 因为,



$$\begin{aligned}(x+y)(AB) &= ((x+y)A)B = (xA+yA)B \\ &= (xA)B + (yA)B = x(AB) + y(AB),\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}(\alpha x)(AB) &= ((\alpha x)A)B = (\alpha(xA))B \\ &= \alpha((xA)B) = \alpha(x(AB)),\end{aligned}$$

故知:  $AB \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_3)$ .

如果  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ ,  $B \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3)$ ,  $C \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4)$ , 則对于  $\mathfrak{R}_1$  里任意  $x$  有

$$x((AB)C) = (x(AB))C = ((xA)B)C$$

及

$$x(A(BC)) = (xA)(BC) = ((xA)B)C,$$

故积  $AB$  适合結合律, 亦即

$$(4) \quad (AB)C = A(BC).$$

其次証重要的分配律: 如果  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  而  $B, C \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3)$ ,  $D \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4)$ , 則

$$(5) \quad A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)D = BD + CD.$$

这可由下面的方程得出:

$$\begin{aligned}x(A(B+C)) &= (xA)(B+C) = (xA)B + (xA)C \\ &= x(AB) + x(AC) = x(AB+AC), \\ x((B+C)D) &= (xB+xC)D = (xB)D + (xC)D \\ &= x(BD) + x(CD) = x(BD+CD).\end{aligned}$$

今把上面結果用于只有一个向量空間  $\mathfrak{R}$  的綫性变换的特殊情形. 显然  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ ,  $+$ ,  $\cdot$  是一个环; 这因为  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ ,  $+$  是一个交換羣, 而  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$  对于  $\cdot$  是封閉的, 并且这个合成是可結合的, 而关于加法是可分配的. 显然  $\mathfrak{L}$  还含有恆等映照  $x \rightarrow x$ , 而这个映照記作 1, 是环  $\mathfrak{L}$  里的恆等元素 (即对于所有  $A$  使  $A1 = A = 1A$ )<sup>1)</sup>.

1) 讀者如果熟悉象本书第一卷第二章的 § 13 里所述交換羣的自同态理論, 就会知道这些結果可由下列推理得出:  $\mathfrak{R}, +$  的自同态的集合  $\mathfrak{C}$  是一个环, 它的加法合成是  $x(A+B) = xA + xB$ , 而以乘积为乘法合成. 集合  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$  是  $\mathfrak{C}$  里能与純量乘法  $\alpha I$  交換的元素的子集合, 因为环里与一个給定于集合的元素可交換的元素的全体构成一个子环, 显然  $\mathfrak{L}$  是  $\mathfrak{C}$  的一个子环.

次設  $\Phi$  是环  $\Delta$  的心, 則  $\Phi$  是  $\Delta$  的一个子域. 因为由元素  $\gamma \in \Phi$  决定的純量乘法  $\gamma_l$  是一个自同态, 并且

$$(\alpha x)\gamma_l = \gamma(\alpha x) = (\gamma\alpha)x = (\alpha\gamma)x = \alpha(\gamma x) = \alpha(x\gamma_l),$$

所以  $\gamma_l$  是綫性变换. 如果用  $\Phi_l$  表示由  $\Phi$  的元素  $\gamma$  决定的純量乘法的集合, 則  $\mathfrak{L} \supseteq \Phi_l$ . 在特殊情形, 如果  $\Delta = \Phi$  是可交换的, 則  $\mathfrak{L}$  含所有的純量乘法. 今来証明: 任意一个羣  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  可看做域  $\Phi$  上的一个向量空間. 本着这个目的, 对于  $\gamma \in \Phi$  及  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ , 我們定义  $\gamma A$  是映照  $x \mapsto \gamma(xA) = (\gamma x)A$ . 因为这是  $A$  与  $\gamma_l (\in \mathfrak{R}_2)$  的积, 或  $\gamma_l (\in \mathfrak{R}_1)$  与  $A$  的积, 而且每个都是綫性变换, 故  $\gamma A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ . 我們容易驗證: 函数  $\gamma A$  适合向量空間里关于純量乘法的各法則; 因此  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  可看做是  $\Phi$  上向量空間.

总结上面两段的結果可知: 集合  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$  是一个环, 同时也是域  $\Phi$  上一个向量空間. 环加法此时与向量空間里加法相同, 而乘法与純量乘法間有下面的关系:

$$(6) \quad \gamma(AB) = (\gamma A)B = A(\gamma B).$$

具有这些性質的代数系叫做域  $\Phi$  上代数(或超复数系). 所以, 如果对于  $\mathfrak{L}$  想同时就三种运算作討論, 則把这个代数系叫做  $\mathfrak{R}$  里綫性变换代数.

### 習 題 11

1. 証明:  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  是关于合成  $AX$  的一个  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_1)$ -模, 这里  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_1)$ ,  $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  而合成  $AX$  为积綫性变换. 仿此, 証明:  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  可看作一个右  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_2)$ -模.

2. 証明: 如果  $\alpha_l$  是一个綫性变换, 則  $\alpha$  在  $\Delta$  的心  $\Phi$  里.

3. 驗證: 如果  $C \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_2)$  而  $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ , 則映照  $X \rightarrow XC$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  的一个  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_1)$ -自同态.

**3. 綫性变换的陣** 今要証: 一个有限維向量空間  $\mathfrak{R}_1$  到另一个有限維向量空間  $\mathfrak{R}_2$  內的綫性变换可借元素在除环  $\Delta$  里的一个有限陣完全表明出来.

令  $\mathfrak{R}_i (i = 1, 2)$  是  $n_i$  維向量空間, 令  $(e_1, e_2, \dots, e_{n_1})$  是  $\mathfrak{R}_1$  的一个有序基,  $(f_1, f_2, \dots, f_{n_2})$  是  $\mathfrak{R}_2$  的一个有序基, 并令  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ . 首先要講的是:  $A$  对于任意  $x$  的作用可由象

$e_i A (i = 1, 2, \dots, n_1)$  决定出; 这因为  $x$  可写成  $\sum_{i=1}^{n_1} \xi_i e_i$ , 所以  $x A = (\sum \xi_i e_i) A = \sum (\xi_i e_i) A = \sum \xi_i (e_i A)$ , 而  $x A$  就由  $x$  的表达式及象  $e_i A$  决定. 令

(7)  $e_i A = \alpha_{i1} f_1 + \alpha_{i2} f_2 + \dots + \alpha_{in_2} f_{n_2} \quad (i = 1, 2, \dots, n_1)$ ,  
 则得阵

$$(8) \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n_2} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n_1 1} & \alpha_{n_1 2} & \dots & \alpha_{n_1 n_2} \end{bmatrix}$$

为  $(e_1 A, \dots, e_{n_1} A)$  关于  $(f_1, \dots, f_{n_2})$  的阵. 如果已知两个有序基及阵(8), 则  $A$  对于  $x$  的效果显然可以推得, 这因为(7)成立, 而  $x A = \sum_{i,j} \xi_i \alpha_{ij} f_j$ .

这个联系可由阵的乘法表出如次. 记  $x = \sum \xi_i e_i$  为一个行  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_1})$ , 同样, 记  $y = \sum \eta_j f_j$  为  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n_2})$ , 则与  $y = x A$  连带的“行向量”可由施行阵的乘法

$$(9) \quad (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_1}) \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n_2} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n_1 1} & \alpha_{n_1 2} & \dots & \alpha_{n_1 n_2} \end{bmatrix}$$

而得出. 故  $x A = y = \sum \eta_j f_j$ , 这里  $\eta_j = \sum_i \xi_i \alpha_{ij}$ , 这就是由(9)得出的结果.

必须指出, 阵  $(\alpha)$  与两个空间内基的选择有关; 因此,  $(\alpha)$  叫做  $A$  关于有序基  $(e_1, e_2, \dots, e_{n_1})$  及  $(f_1, f_2, \dots, f_{n_2})$  的阵. 如果  $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$ , 则自然只用一个有序基, 亦即取  $f_i = e_i$ ; 此时, 称  $(\alpha)$  是  $A$  关于  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的阵.

上面所得的结果是: 任意  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  决定元素属于  $\Delta$  的一个  $n_1 \times n_2$  阵. 今来叙述逆定理: 任意  $n_1 \times n_2$  阵定义  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  内的一个线性变换. 首先我们要指出: 如果  $(e_1, e_2, \dots, e_{n_1})$  是  $\mathfrak{R}_1$  里一个基, 而  $(u_1, u_2, \dots, u_{n_1})$  是  $\mathfrak{R}_2$  里  $n_1$  个向量的任意有序集

合, 则有一个綫性变换  $A$  存在把  $e_i$  映照到  $u_i (i = 1, 2, \dots, n_1)$ , 这可观察映照  $\sum \xi_i e_i \rightarrow \sum \xi_i u_i$  而得到. 因为一个向量  $x \in \mathfrak{R}_1$  只有一种方法写成  $\sum \xi_i e_i$ , 所以这个映照是单值的, 又因为任意  $x \in \mathfrak{R}_1$  都可写成  $\sum \xi_i e_i$  的形状, 所以这个映照定义在整个  $\mathfrak{R}_1$  上. 如果  $y = \sum \eta_i e_i$  是  $\mathfrak{R}_1$  里另一个向量, 所以  $y \rightarrow \sum \eta_i u_i$ , 并且  $x + y = \sum (\xi_i + \eta_i) e_i \rightarrow \sum (\xi_i + \eta_i) u_i = \sum \xi_i u_i + \sum \eta_i u_i$ ; 故这样变换是一个同态. 又因为  $\alpha x = \sum (\alpha \xi_i) e_i \rightarrow \sum (\alpha \xi_i) u_i = \alpha (\sum \xi_i u_i)$ , 故映照是綫性的. 显然,  $e_i = 1 e_i \rightarrow 1 u_i = u_i$ , 即得所求. 次令  $(\alpha)$  是任意  $n_1 \times n_2$  陣, 并且令  $(f_1, f_2, \dots, f_{n_2})$  是  $\mathfrak{R}_2$  里一个基, 则定义  $u_i = \sum \alpha_{ij} f_j (i = 1, 2, \dots, n_1)$ , 并且可决定一个綫性变换  $A$  使  $e_i A = u_i$ . 显然  $A$  关于  $(e_1, e_2, \dots, e_{n_1}), (f_1, f_2, \dots, f_{n_2})$  的陣是給定的陣  $(\alpha)$ . 这就証明了对应  $A \mapsto (\alpha)$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  与元素在  $\Delta$  里的  $n_1 \times n_2$  陣的集合間的 1—1 对应.

## 習 題 12

1. 令  $\mathfrak{R}$  是次数  $< n$  的实系数多项式构成的向量空間, 令  $D$  表示微分算子, 証明:  $D$  是无势的, 亦即  $D^n = 0$ . 决定  $D$  关于  $(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})$  及关于  $(1, \lambda/1!, \dots, \lambda^{n-1}/(n-1)!)$  的陣.

2. 令  $\mathfrak{R}$  是次数  $< n$  的实系数多项式构成的向量空間, 并令  $U$  是綫性算子  $f(\lambda) \rightarrow f(\lambda+1)$ . 証明:

$$U = 1 + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \dots + \frac{D^{n-1}}{(n-1)!},$$

3. 决定  $\delta = U - 1$  关于基  $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$  的陣, 这里

$$e_0 = 1, \quad e_i = \frac{\lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-i+1)}{i!}.$$

4. 令  $\mathfrak{R}$  是复数的集合, 看作实数的子域上向量空間, 証明: 映照  $x \rightarrow \bar{x}$  (复数共轭数) 是綫性的, 并且决定它关于基  $(1, I)$  的陣.

**4. 陣的合成** 如前令  $\mathfrak{R}_i (i = 1, 2)$  是  $\Delta$  上  $n_i$  維向量空間, 并且令  $(e_1, e_2, \dots, e_{n_1})$  及  $(f_1, f_2, \dots, f_{n_2})$  分别是这两个空間的基. 令  $A$  及  $B$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  內的綫性变换, 而  $(\alpha)$  与  $(\beta)$  分别是这两个变换关于給定基的陣, 則

$$(10) \quad e_i A = \sum \alpha_{ij} f_j, \quad e_i B = \sum \beta_{ij} f_j.$$

于是,

$$(11) \quad e_i (A + B) = e_i A + e_i B = \sum (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) f_j.$$

这証明： $A + B$  的陣里每个元素可由把  $(\alpha)$  与  $(\beta)$  里在同位置上元素相加而得。因此，我們定义两个  $n_1 \times n_2$  陣  $(\alpha)$  与  $(\beta)$  的和是一个  $n_1 \times n_2$  陣，它的  $(i, j)$  元素是  $\alpha_{ij} + \beta_{ij}$ 。我們容易驗證： $n_1 \times n_2$  陣的集合关于这样加法成一个交換羣。事实上，除了記号方面的差別外，这是第一章里提到的結果的特別情形： $n$  维組的集合在分量相加的加法下成一个羣。零陣  $0$  是每个位置上的元素都是  $0$  的陣，而  $-(\alpha)$  里在  $(i, j)$ -位置上的元素是  $-\alpha_{ij}$ 。故(11)里建立的結果——就是說，如果在綫性变换与陣間有对应  $A \rightarrow (\alpha)$  及  $B \rightarrow (\beta)$ ，則  $A + B \rightarrow (\alpha) + (\beta)$ ——等价于說  $A \rightarrow (\alpha)$  是羣同构。

次考察第三个向量空間  $\mathfrak{R}_3$ ，它的基是  $(g_1, g_2, \dots, g_{n_3})$ 。令  $C$  是  $\mathfrak{R}_2$  到  $\mathfrak{R}_3$  內的一个綫性变换，并且令  $(\gamma)$  是  $C$  关于  $(f_1, f_2, \dots, f_{n_2})$ ， $(g_1, g_2, \dots, g_{n_3})$  的陣，則

$$(12) \quad f_j C = \sum \gamma_{jk} g_k,$$

而

$$(13) \quad e_i(AC) = \left( \sum_j \alpha_{ij} f_j \right) C = \sum_j \alpha_{ij} (f_j C) = \sum_{j,k} \alpha_{ij} \gamma_{jk} g_k.$$

这証明： $AC$  的陣里  $(i, k)$ -位置上的元素是  $\sum_j \alpha_{ij} \gamma_{jk}$ ；所以这个陣是第一章里定义的积  $(\alpha)(\gamma)$ 。

陣乘法的結合律已在第一章的 §6 里建立了，今証分配律于次： $[(\alpha) + (\beta)](\gamma)$  的  $(i, k)$ -元素是

$$\sum_j (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \gamma_{jk},$$

而  $(\alpha)(\gamma) + (\beta)(\gamma)$  的  $(i, k)$ -元素是

$$\sum_j \alpha_{ij} \gamma_{jk} + \sum_j \beta_{ij} \gamma_{jk},$$

故由  $\Delta$  里分配律的成立得

$$[(\alpha) + (\beta)](\gamma) = (\alpha)(\gamma) + (\beta)(\gamma).$$

同理可証

$$(\alpha)[(\beta) + (\gamma)] = (\alpha)(\beta) + (\alpha)(\gamma).$$

我們还应指出：由綫性变换的結合律及分配律容易推得关于陣的

結合律及分配律(參看習題 13 的第 1 題).

其次要說的是:元素在  $\Delta$  里的  $n_1 \times n_2$  陣的集合可看作  $\Delta$  上向量空間(或右向量空間);這是很明顯的,因為陣的集合實質上與  $\Delta$  上  $n_1 n_2$ -維組的集合相同. 我們照前面辦法定義  $\rho(\alpha)$  是  $n_1 \times n_2$  陣,它的元素是  $(\alpha)$  的對應元素的  $\rho$  倍. 顯然這樣得的空間是  $n_1 n_2$  維. 如果使用陣與綫性變換間的對應,則可把這個討論移用于  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  內的綫性變換的集合  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ . 但除非  $\Delta = \Phi$  是可交換外,這樣得來的  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  里純量乘法與  $\mathfrak{R}_1$  及  $\mathfrak{R}_2$  里基的選擇是有关的.

另一方面,令  $\Delta = \Phi$ ,則在 § 2 里已經知道了一種用  $\Phi$  的元素乘綫性變換的乘法,它與基的選擇無關. 積  $\gamma A$  ( $\gamma \in \Phi$ ) 取為積  $\gamma_i A$ ,而  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  關於這個合成是  $\Phi$  上向量空間. 至此,我們注意到,如果  $(e_1, e_2, \dots, e_{n_1})$  是  $\mathfrak{R}_1$  的一個基,則  $e_i \gamma_i = \gamma e_i$ . 所以  $\gamma_i$  關於這個基的陣是對角陣

$$(14) \quad \text{diag} \{ \gamma, \gamma, \dots, \gamma \} = \begin{bmatrix} \gamma & & 0 \\ & \gamma & \\ 0 & & \gamma \end{bmatrix}.$$

於是,如果  $(\alpha)$  是  $A$  關於  $(e_1, e_2, \dots, e_{n_1}), (f_1, f_2, \dots, f_{n_2})$  的陣,則  $\gamma(\alpha)$  是  $\gamma A$  關於這兩個基的陣. 這就是說,純量乘法  $\gamma(\alpha)$  與  $\gamma A$  對應.

這個結果的另一種說法如次:令  $A \mapsto (\alpha)$  是把綫性變換  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  與它關於基  $(e_1, e_2, \dots, e_{n_1}), (f_1, f_2, \dots, f_{n_2})$  的陣  $(\alpha)$  聯繫起來的對應,則這個對應是向量空間  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  到元素在  $\Phi$  里的  $n_1 \times n_2$  陣構成的向量空間上的一種等價:這因為,我們已知  $A \mapsto (\alpha)$  是一個羣同構,並且已經驗證了  $\gamma A \mapsto \gamma(\alpha)$  的緣故. 因為陣的空間是  $n_1 n_2$ -維,所以  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  是  $n_1 n_2$ -維. 這證明了下面的定理.

**定理 1.** 令  $\mathfrak{R}_i (i = 1, 2)$  是域  $\Phi$  上  $n_i$ -維向量空間,並令  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  內的綫性變換的集合. 定義  $A + B$  及

$\gamma A (\gamma \in \Phi)$  如上面所述的那樣, 則  $\mathcal{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  是關於這些合成的一個  $n_1 n_2$ -維向量空間.

現在回到任意的  $\Delta$  這個情形來考慮, 但取  $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$ , 並取  $f_i = e_i$ ; 於是,  $(\alpha)$  是  $A$  關於基  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的陣. 此時有環  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$  到  $n \times n$  陣的集合  $\Delta_n$  的對應  $A \mapsto (\alpha)$ . 在  $\Delta_n$  里引入加法與乘法合成就把這個集合化為環. 我們所得的結果還指出: 如果  $A \mapsto (\alpha)$ ,  $B \mapsto (\beta)$ , 則  $A + B \mapsto (\alpha) + (\beta)$  及  $AB \mapsto (\alpha)(\beta)$ . 故得重要的

**定理 2.** 令  $\mathfrak{R}$  是  $\Delta$  上  $n$  維向量空間,  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是它的一個基. 如果  $A$  是  $\mathfrak{R}$  里一個線性變換, 我們把  $A$  關於基  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的陣  $(\alpha)$  與  $A$  聯繫起來, 則  $A \mapsto (\alpha)$  是  $\mathfrak{R}$  里線性變換環  $\mathcal{L}$  到陣環  $\Delta_n$  上的一個同構.

### 習 題 13

1. 用線性變換的乘法的結合性與分配性, 證明陣的乘法的對應性質.

**5. 基的改變, 陣的等價及相似** 令  $(\alpha)$  是  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  關於基  $(e_1, e_2, \dots, e_{n_1})$ ,  $(f_1, f_2, \dots, f_{n_2})$  的陣. 現在我們要改變  $\mathfrak{R}_1$  及  $\mathfrak{R}_2$  的基, 並且計算  $A$  關於新基的陣. 今令  $(u_1, u_2, \dots, u_{n_1})$  是  $\mathfrak{R}_1$  的新基, 這裡  $u_i = \sum_j \mu_{ij} e_j$ , 並令  $(v_1, v_2, \dots, v_{n_2})$  是  $\mathfrak{R}_2$  的新基, 這裡  $v_p = \sum_q v_{pq} f_q$ ; 則陣  $(\mu)$  與  $(v)$  都是滿秩的, 它們的逆陣記作  $(\mu)^{-1} = (\mu_{ij}^*)$ ,  $(v)^{-1} = (v_{pq}^*)$ . 於是, 得

$$\begin{aligned} u_i A &= (\sum_j \mu_{ij} e_j) A = \sum_j \mu_{ij} (e_j A) = \sum_j \mu_{ij} \alpha_{jp} f_p \\ &= \sum_j \mu_{ij} \alpha_{jp} v_{pq}^* v_q = \sum_q \tilde{\alpha}_{iq} v_q, \end{aligned}$$

這裡

$$\tilde{\alpha}_{iq} = \sum_{j,p} \mu_{ij} \alpha_{jp} v_{pq}^*.$$

於是,  $A$  的新陣是

$$(15) \quad (\tilde{\alpha}) = (\mu)(\alpha)(v)^{-1},$$

這裡  $(\mu)$  給出  $\mathfrak{R}_1$  里基的改變, 而  $(v)$  給出  $\mathfrak{R}_2$  里基的改變.

如果對於兩個  $n_1 \times n_2$  陣  $(\alpha)$  及  $(\tilde{\alpha})$ , 有陣  $(\mu) \in L(\Delta, n_1)$  及

$(v) \in L(\Delta, n_2)$  存在, 使

$$(16) \quad (\tilde{\alpha}) = (\mu)(\alpha)(v),$$

則說  $(\alpha)$  与  $(\tilde{\alpha})$  是等价的(或相伴的). 故知: 綫性变换  $A$  关于两个空間里不同的基的任意两个陣是等价的. 这定理的逆也是显然的. 这因为, 令  $(\alpha)$  与  $(\tilde{\alpha})$  的关系如(16), 并且令  $A$  是綫性变换, 它关于  $(e_1, e_2, \dots, e_{n_1})$  与  $(f_1, f_2, \dots, f_{n_2})$  的陣是  $(\alpha)$ , 則这个綫性变换关于  $(u_1, u_2, \dots, u_{n_1}), (w_1, w_2, \dots, w_{n_2})$  的陣是  $(\tilde{\alpha})$ , 这里

$$u_i = \sum_j \mu_{ij} e_j, \quad w_p = \sum_q v_{pq}^* f_q, \quad (v)^{-1} = (v_{pq}^*).$$

次設  $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$ , 而  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是一个基. 令  $(\alpha)$  是  $A$  关于  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的陣, 則  $e_i A = \sum_j \alpha_{ij} e_j$ , 而由計算指出,

$$(17) \quad (\tilde{\alpha}) = (\mu)(\alpha)(\mu)^{-1},$$

$\Delta_n$  里这样关系的两个陣叫做是相似的. 也象等价的情形, 显然  $\Delta_n$  里两个陣相似必須而且只須它們都是同一个綫性变换关于  $\Delta$  上空間  $\mathfrak{R}$  的两个基的陣.

在下一节里可見, 我們容易給出陣的等价的充要条件. 但相似問題却需要很費力的分析, 我們将在下一章里处理, 这里只解释处理這個問題要使用的方法.

**例.** 我們要証明隨

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (\beta) = \begin{bmatrix} \xi_1 & & 0 \\ & \xi_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \xi_n \end{bmatrix}$$

在  $C_n$  里相似, 这里  $\xi_i$  是 1 的  $n$  个不同的  $n$  次根, 而  $C$  是复数域. 我們使用  $(\alpha)$  在  $C$  上一个  $n$ -維向量空間  $\mathfrak{R}$  里决定一个綫性变换  $A$ ; 办法是在  $\mathfrak{R}$  里选取一个基  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , 并定义  $i < n$  时,  $e_i A = \sum_j \alpha_{ij} e_j = e_{i+1}$ , 而  $i = n$  时  $e_i A = e_1$ . 于是, 要証明我們的結果, 就必须找一个基  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  使对于上面定义的  $A$  有  $u_i A = \xi_i u_i$ . 我們不去詳細論述怎样找出这样的  $u_i$ , 而来証明: 下面的  $u_i$

$$u_i = e_1 + \xi_i^{-1} e_2 + \xi_i^{-2} e_3 + \dots + \xi_i^{-(n-1)} e_n$$



是适合我們的要求, 首先, 有

$$u_i A = e_i + \xi_i^{-1} e_n + \cdots + \xi_i^{-(n-1)} e_1 = \xi_i u_i.$$

其次, 因为  $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$  关于  $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$  的陣是范德曼得陣

$$(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1^{-1} & \xi_1^{-2} & \cdots & \xi_1^{-(n-1)} \\ 1 & \xi_2^{-1} & \xi_2^{-2} & \cdots & \xi_2^{-(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \xi_n^{-1} & \xi_n^{-2} & \cdots & \xi_n^{-(n-1)} \end{bmatrix},$$

这里  $\xi_i^{-1}$  都不相同(参看习题 7 的第 1 题), 故  $u_i$  是一个基. 这証明了相似性, 并且事实上指出  $(\beta) = (\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}$ , 这里  $(\mu)$  就是上面写出的陣.

## 習 題 14

1. 証明: 等价及相似的关系是反身的、对称的及传递的.
2. 証明: 如果  $\Delta$  的特征数是 0, 則下面两个陣在  $\Delta_n$  里相似:

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (\beta) = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

**6. 綫性变换的秩空間与象空間** 如果  $A$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  里的一个綫性变换, 而  $\mathfrak{S}_1$  是  $\mathfrak{R}_1$  的一个子空間, 則由形状如  $x_1 A (x_1 \in \mathfrak{S}_1)$  的所有向量构成的象  $\mathfrak{S}_1 A$  是  $\mathfrak{R}_2$  的一个子空間. 如果  $x_1, y_1 \in \mathfrak{S}_1$ , 則  $x_1 + y_1 \in \mathfrak{S}_1$ , 从而  $x_1 A + y_1 A = (x_1 + y_1) A \in \mathfrak{S}_1 A$ . 如果  $x_1 \in \mathfrak{S}_1$ , 則还有  $\alpha x_1 \in \mathfrak{S}_1$ ; 所以,  $\alpha(x_1 A) = (\alpha x_1) A \in \mathfrak{S}_1 A$ . 如果向量  $f_1, f_2, \cdots, f_m$  是  $\mathfrak{S}_1$  的生成元素, 則  $\mathfrak{S}_1$  里任意元素  $x_1$  可表达为形状  $\sum \xi_i f_i$ , 所以, 任意  $x_1 A = \sum \xi_i (f_i A)$ . 故象向量  $f_1 A, f_2 A, \cdots, f_m A$  都是  $\mathfrak{S}_1 A$  的生成元素. 如果  $f_i$  构成  $\mathfrak{S}_1$  的一个基, 則  $m = \dim \mathfrak{S}_1$ . 象  $f_i A$  不必成为  $\mathfrak{S}_1 A$  的一个基, 但无論如何它們总是生成元素, 所以它們的个数  $m \geq \dim \mathfrak{S}_1 A$ . 故知, 象空間的維数不超过原来空間的維数.

$\mathfrak{R}_2$  的子空間  $\mathfrak{R}_1 A$  叫做  $A$  的秩空間; 它的維数叫做  $A$  的秩. 如果  $(e_1, e_2, \cdots, e_{n_1})$  是  $\mathfrak{R}_1$  的基, 則  $\mathfrak{R}_1 A = [e_1 A, e_2 A, \cdots, e_{n_1} A]$  是由向量  $e_i A$  生成的空間. 所以,  $A$  的秩是集合  $(e_1 A, e_2 A, \cdots, e_{n_1} A)$  的秩. 如果  $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_2})$  是  $\mathfrak{R}_2$  的一个基, 而  $e_i A = \sum_j \alpha_{ij} f_j$  ( $i = 1, 2, \cdots, n_1$ ), 則集合  $(e_1 A, e_2 A, \cdots, e_{n_1} A)$  的秩

与  $A$  关于基  $(e_1, e_2, \dots, e_{n_1}), (f_1, f_2, \dots, f_{n_2})$  的陣的行秩相等, 这証明了下面的定理.

**定理 3.** 向量空間的一个綫性變換的秩等于  $A$  的任意一个陣的行秩.

其次考虑  $\mathfrak{R}_1$  里能使  $zA = 0$  的向量  $z$  的全体  $\mathfrak{N}$ . 容易验证:  $\mathfrak{N}$  是  $\mathfrak{R}_1$  的一个子空間, 我們叫它做  $A$  的脑空間, 它的維数叫做  $A$  的脑. 今証关于  $A$  的秩及脑的主要定理.

**定理 4.**  $A$  的秩 +  $A$  的脑 = 空間  $\mathfrak{R}_1$  的維数  $n_1$ .

証 令  $(z_1, z_2, \dots, z_\nu)$  是  $\mathfrak{N}$  的一个基, 則我們可以  $n_1 - \nu$  个向量  $x_i$  补充这个基使  $(x_1, \dots, x_{n_1-\nu}; z_1, z_2, \dots, z_\nu)$  成为  $\mathfrak{R}_1$  的基. 向量

$$x_1A, x_2A, \dots, x_{n_1-\nu}A, z_1A, z_2A, \dots, z_\nu A$$

是秩空間  $\mathfrak{R}_1A \subseteq \mathfrak{R}_2$  的生成元素. 因为  $z_iA = 0$ , 所以向量  $x_1A, \dots, x_{n_1-\nu}A$  也是  $\mathfrak{R}_1A$  的生成元素. 又因为, 如果

$$\beta_1(x_1A) + \beta_2(x_2A) + \dots + \beta_{n_1-\nu}(x_{n_1-\nu}A) = 0,$$

則  $(\sum \beta_i x_i)A = 0$ , 而  $\sum \beta_i x_i \in \mathfrak{N} = [z_1, z_2, \dots, z_\nu]$ . 但集合  $(x_1, \dots, x_{n_1-\nu}, z_1, \dots, z_\nu)$  是一个綫性无关的集合, 故推知所有  $\beta_i$  都等于 0. 因此, 向量  $x_1A, \dots, x_{n_1-\nu}A$  是綫性无关的. 所以, 如果令  $y_i = x_iA$ , 則  $(y_1, y_2, \dots, y_{n_1-\nu})$  是  $\mathfrak{R}_1A$  的一个基. 故  $\dim \mathfrak{R}_1A = n_1 - \nu = n_1 - (A \text{ 的脑})$ . 定理就証明了.

今把  $\mathfrak{R}_1A$  的基  $(y_1, y_2, \dots, y_{n_1-\nu})$  补充成  $\mathfrak{R}_2$  的一个基  $(y_1, y_2, \dots, y_{n_1-\nu}, w_1, w_2, \dots, w_{n_2-n_1+\nu})$ , 則得关系

$$x_iA = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, \rho \equiv n_1 - \nu),$$

$$z_jA = 0 \quad (j = 1, \dots, \nu).$$

这就証明了  $A$  关于基  $(x_1, \dots, x_\rho, z_1, \dots, z_\nu), (y_1, \dots, y_\rho, w_1, \dots, w_{n_2-\rho})$  的陣是

$$(18) \quad \text{diag} \left\{ \overbrace{1, \dots, 1}^\rho, 0, \dots, 0 \right\}^{1)}.$$

1) 我們使用(14)里引入的这个記法来表示一个陣, 它的非零元素仅出現在  $(1, 1), (2, 2), \dots$  位置上.

如果这两个基关于原来基  $(e_1, e_2, \dots, e_{r_1})$  及  $(f_1, f_2, \dots, f_{r_2})$  的陣順序是  $(\mu)$  及  $(\nu)$ , 则由前节的结果知  $(\mu)(\alpha)(\nu)^{-1}$  是陣(18), 个数  $\rho$  是陣  $(\alpha)$  的行秩. 这证明了下面的定理.

**定理 5.** 如果  $(\alpha)$  是元素在除环  $\Delta$  里的一个  $n_1 \times n_2$  陣, 而  $(\alpha)$  有行秩  $\rho$ , 則  $(\alpha)$  与(18)里給出的陣等价.

如果  $(\alpha)$  与  $(\tilde{\alpha})$  是等价陣, 則可知它們得作为同一个綫性变换  $A$  的陣.  $(\alpha)$  的行秩及  $(\tilde{\alpha})$  的行秩都与  $A$  的秩相等, 因此等价陣有相同的行秩. 反过来, 如果  $(\alpha)$  与  $(\tilde{\alpha})$  有相同的行秩  $\rho$ , 則这两个陣都与同一个陣(18)等价; 所以它們也是等价的.

**定理 6.** 元素在除环  $\Delta$  里的两个  $n_1 \times n_2$  陣是等价的必須而且只須它們有相同的行秩.

今考虑  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  内的一个綫性变换  $A$  是等价的条件. 因为  $A$  是一个同态, 所以  $A$  是 1—1 的必須而且只須它的核  $\mathfrak{N} = 0$ . 显然  $\mathfrak{N}$  是  $A$  的核空間. 所以,  $A$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  上的一个 1—1 变换必須而且只須: (1)  $\mathfrak{N} = 0$ ; (2)  $\mathfrak{R}_1 A = \mathfrak{R}_2$ . 在  $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$  这一个特殊情形, 这两个条件中只要随便取一个就够了; 这因为, 如果  $\mathfrak{N} = 0$ , 則  $A$  的秩  $= \dim \mathfrak{R} = n$ , 故  $\mathfrak{R}A = \mathfrak{R}$ . 另一方面, 如果  $\mathfrak{R}A = \mathfrak{R}$ , 則  $A$  的秩  $= n$ , 而  $A$  的核  $= 0$ . 所以,  $\mathfrak{N} = 0$ .

必須指出, 如果  $A$  是等价的, 則它的逆变换  $A^{-1}$  也是等价的; 这事实让讀者来証明. 一个向量空間到它自身上的等价关于积运算构成一个羣. 如果  $A$  是  $\mathfrak{R}$  里一个綫性变换, 而  $(\alpha)$  是它关于基  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的陣, 則  $A$  在  $\mathfrak{R}$  里是一个等价必須而且只須  $(\alpha)$  是一个单位. 故知,  $\mathfrak{R}$  里等价的羣与  $\Delta_n$  里滿秩陣的羣  $L(\Delta, n)$  同构. 前者叫做向量空間  $\mathfrak{R}$  里的全体綫性羣.

## 習 題 15

- 証明: 如果  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  而  $\mathfrak{S}_1$  与  $\mathfrak{U}_1$  都是  $\mathfrak{R}_1$  的子空間, 則  
 $(\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{U}_1)A = \mathfrak{S}_1 A + \mathfrak{U}_1 A$ ,  $(\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{U}_1)A \subseteq \mathfrak{S}_1 A \cap \mathfrak{U}_1 A$ .
- 証明: 如果  $(\alpha)$  及  $(\beta)$  是元素在  $\Delta$  里的  $m \times n$  陣, 則  $\{(\alpha) + (\beta)\}$  的(行)秩  $\leq (\alpha)$  的秩  $+$   $(\beta)$  的秩.
- 証明: 如果  $(\alpha)$  是一个  $m \times n$  陣, 而  $(\beta)$  是一个  $n \times p$  陣, 它們的元素都在  $\Delta$  里, 則

#### 4. 如果

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求单位  $(\mu)$  及  $(\nu)$  使  $(\mu)(\alpha)(\nu)$  成为 (18) 的形状.

5. (费廷). 如果  $A$  是  $\mathfrak{R}$  里一个线性变换, 令  $\mathfrak{S}$  是对于某个  $m$  能使  $zA^m = 0$  的向量  $z$  的集合, 并且令  $\mathfrak{S}_k$  是所有秩空间  $\mathfrak{R}A^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 的交. 证明:  $\mathfrak{S}$  及  $\mathfrak{S}_k$  都是子空间, 并证明  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{S}_k$ .

6. 証明:  $A$  把第 5 題的  $3$  及  $\odot$  映到它們自身內;  $A$  在  $3$  里是无势的, 而在  $\odot$  里是一个等价, 应用这个結果証明:  $\Delta_n$  里任意陣与形状如

$$\begin{bmatrix} (\beta) & 0 \\ 0 & (\gamma) \end{bmatrix}$$

的陣相似, 这里  $(\beta)$  是无势的, 而  $(\gamma)$  是满秩的.

### 7. 綫性方程組

設有左手綫性方程組

[illegible]

这里  $\alpha_i$  及  $\delta_i$  都是除环  $\Delta$  里給定的元素, 我們要在  $\Delta$  里找出解  $\xi_i = \beta_i$ . 如果  $\xi_i = \beta_i$  适合这些方程, 則說  $n$ -维組  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  是一个解. 如果  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  及  $(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)$  是(19)的两个解, 則  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  是在(19)里取  $\delta_i = 0$  所得齐次方程組的一个解, 这里  $\gamma_i = \beta'_i - \beta_i$ . 反过来, 如果  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  是(19)的一个解, 而  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  是齐次方程組的一个解, 則  $(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)$  是(19)的另一个解, 这里  $\beta'_i = \beta_i + \gamma_i$ . 这就証明了: 如果(19)有解, 則我們要得出(19)的解是求这个方程組的一个特殊解, 及对应齐次方程組的所有解, 然后把齐次方程組的所有解加到这个特殊解去, 就得(19)的所有解.

所以,我們首先要考察(19)的解的存在問題. 引入向量  $u_i = \sum_j a_{ij} f_j$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $v = \sum_j \delta_j f_j$ , 这里  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$  是  $m$  維空間  $\mathfrak{S}$  的一个基. 則立即知  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  是(19)的一个解必須而且只須  $\beta_i$  适合

$$(20) \quad v = \beta_{\mu_1} + \beta_{\mu_2} + \cdots + \beta_{\mu_n}.$$

所以(19)是可解的必須而且只須  $v$  是关于  $u_1, u_2, \dots, u_n$  綫性相

关的, 另一方面,  $v$  关于  $u_i$  线性相关必须而且只须

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$  的秩  $= (u_1, u_2, \dots, u_n, v)$  的秩,  
而这个等式要成立必须而且只须阵  $(\alpha)$  的行秩等于增广阵

$$(21) \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \\ \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_m \end{bmatrix}$$

的秩. 特别是, 如果  $\Delta = \Phi$  是可交换的, 则有下面的

**定理 7.** 如果线性方程组(19)的  $\alpha_{ij}$  及  $\delta_j$  在域  $\Phi$  里, 则(19)在  $\Phi$  里有一个解  $\xi_i = \beta_i$  必须而且只须系数的阵  $(\alpha)$  与增广阵(21)有相同的行列式秩.

其次考虑取  $\delta_j = 0$  所得的齐次线性方程组. 要讨论这个方程组, 我们引进以  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  为基的一个  $n$  维向量空间  $\mathfrak{R}$ , 并且令  $A$  是线性变换, 它关于基  $(e_1, e_2, \dots, e_n), (f_1, f_2, \dots, f_m)$  的阵是  $(\alpha)$ , 则按上面的记法, 向量  $u_i = e_i A$ , 而  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  构成齐次方程组的一个解必须而且只须  $\sum \beta_i u_i = 0$ . 因为  $u_i = e_i A$ , 这就等于条件  $(\sum \beta_i e_i) A = 0$ . 所以,  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  是一个解必须而且只须  $\sum \beta_i e_i$  在  $A$  的核空间  $\mathfrak{N}$  里. 如果  $v$  是  $A$  的核, 则有  $\mathfrak{N}$  的一个基  $(z_1, z_2, \dots, z_v)$ ; 如果  $z_k = \sum \beta_i^{(k)} e_i$  ( $k = 1, 2, \dots, v$ ), 则

$$(\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \dots, \beta_n^{(1)}), \dots, (\beta_1^{(v)}, \beta_2^{(v)}, \dots, \beta_n^{(v)})$$

是齐次方程组的(左)线性无关解的一个集合. 任意解  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  是这些解的线性组合. 由于秩与核间的关系知  $v = n - \rho$ , 这里  $\rho$  是阵  $(\alpha)$  的行秩. 故得下面结果:

**定理 8.** 令  $\sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 是左手齐次方程组, 并且令  $(\alpha)$  的行秩为  $\rho$ , 则有  $n - \rho$  个线性无关解  $(\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \dots, \beta_n^{(k)})$  ( $k = 1, 2, \dots, n - \rho$ ) 存在使方程组的任意解是这些解的一个左线性组合.

这个定理的一个直接推論是說<sup>1)</sup>: 含有多于  $m$  个未知量的  $m$  个齐次方程組有一个非全零解, 必須指出, 在可交換的情形, 上面命題里的“左”字可以刪去, 并且用行列式秩来代替秩.

### 習 題 16

1. 設取  $\Delta$  为有理数域, 求下面方程組所有的解:

$$\begin{aligned} 2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - 3\xi_4 &= 0, \\ \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 &= 0, \\ 4\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 &= 0. \end{aligned}$$

8. 右向量空間里的綫性变换 如果  $\mathfrak{R}'_1$  及  $\mathfrak{R}'_2$  是右向量空間, 則定义  $\mathfrak{R}'_1$  到  $\mathfrak{R}'_2$  內的一个綫性变换为  $\mathfrak{R}'_1$  到  $\mathfrak{R}'_2$  內一个映照使

$$(22) \quad (x' + y')A = x'A + y'A, \quad (x'\alpha)A = (x'A)\alpha,$$

对于  $\mathfrak{R}'_1$  里所有  $x', y'$  及  $\Delta$  里所有  $\alpha$  都成立. 关于左向量空間的討論可通过一二記法上的改变而轉移于右向量空間上. 如果  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_{n_1})$  及  $(f'_1, f'_2, \dots, f'_{n_2})$  順序是  $\mathfrak{R}'_1$  及  $\mathfrak{R}'_2$  的基, 命

$$(23) \quad e'_i A = \sum_{j=1}^{n_2} f'_j \alpha_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, n_1),$$

并把

$$(24) \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n_2} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n_1 1} & \alpha_{n_1 2} & \cdots & \alpha_{n_1 n_2} \end{bmatrix}$$

叫做綫性变换  $A$  关于給定的基的陣. 應該指出, (24) 是 (23) 的右端的系数陣的折轉陣. 与前此一样, 陣的和对应于綫性变换的和, 但积的情形与在左向量空間的情形不同. 設  $(g'_1, g'_2, \dots, g'_{n_3})$  是  $\mathfrak{R}'_2$  的一个基, 并且令  $B$  是  $\mathfrak{R}'_2$  到  $\mathfrak{R}'_3$  內的一个綫性变换, 令  $(\beta)$  是  $B$  关于基  $(f'_1, f'_2, \dots, f'_{n_2}), (g'_1, g'_2, \dots, g'_{n_3})$  的陣, 則

$$f'_i B = \sum_k g'_k \beta_{ki} \quad (i = 1, 2, \dots, n_2).$$

所以,

$$e'_i AB = \left( \sum_j f'_j \alpha_{ji} \right) B = \sum_j (f'_j B) \alpha_{ji} = \sum_{j,k} g'_k \beta_{ki} \alpha_{ji} = \sum_{j,k} g'_k \gamma_{ki},$$

1) 参看习题 3 的第 3 題.

这里  $\gamma_{ki} = \sum_j \beta_{kj} \alpha_{ji}$ . 因此,  $C = AB$  的陣是积  $(\beta)(\alpha)$ , 而不是前面的  $(\alpha)(\beta)$ .

如果  $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}')$  表示  $\mathfrak{R}'$  到它自身内的綫性变换环, 則綫性变换与它們关于一定的基  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  的陣之間的对应  $A \rightarrow (\alpha)$  現在是一个反自同构. 所以, 它是 1—1 的, 并且陣的和对应于綫性变换的和, 但与綫性变换的积对应的是对应陣取逆序的积. 环  $\mathfrak{L}'$  与陣环  $\Delta_n$  成反同构, 所以也与  $\Delta$  上  $n$  維左向量空間里綫性变换环  $\mathfrak{L}$  成反同构.

基由  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_{n_1})$  改变为  $(u'_1, u'_2, \dots, u'_{n_1})$ , 这里  $u'_i = \sum e'_j \mu_{ji}$ , 及基由  $(f'_1, f'_2, \dots, f'_{n_2})$  改变为  $(v'_1, v'_2, \dots, v'_{n_2})$ , 这里  $v'_p = \sum f'_q \nu_{qp}$ , 反映在  $A$  的陣的改变是由  $(\alpha)$  变为

$$(\tilde{\alpha}) = (\nu)^{-1}(\alpha)(\mu).$$

如果在  $\mathfrak{R}'_1 = \mathfrak{R}'_2 = \mathfrak{R}'$  里单使用一个基, 則把基改变后,  $A$  的陣  $(\alpha)$  就被它的相似陣  $(\mu)^{-1}(\alpha)(\mu)$  所代替, 这里  $(\mu)$  給出基的改变.

前此关于秩及跡的討論可以不用改变而移到右向量空間里来.  $A$  的秩現在是它的陣的列秩. 由此可見等价陣不但有相同的行秩, 也有相同的列秩. 我們已知, 任意陣  $(\alpha)$  必与一个“范”式 (18) 等价. 又由定义直接知, 陣的范式有相同的行秩与列秩. 所以, 任意陣  $(\alpha)$  的行秩与列秩相同. 这个結果今述为

**定理 9.** 任意陣的行秩与列秩相同.

这个結果的更接近几何的另—証明見于 § 12. 末了, 我們要提到的是: 右手綫性方程組的理論可完全按上面关于左手方程組的理論作类似的发展, 只要用右向量空間代替左向量空間就可以了.

## 習 題 17

1. 就右手方程組敘述定理 7 的类似定理, 并作証明.

**9. 綫性函数** 我們在向量空間  $\mathfrak{R}$  上曾定义綫性函数为  $\mathfrak{R}$  到  $\Delta$  內的一个映照  $x \rightarrow f(x)$ , 使

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(ax) = af(x).$$

如果我們按慣例用

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

來定義兩個這樣映照的和, 並且用

$$(f\mu)(x) = f(x)\mu$$

定義積  $f\mu$ , 這裡  $\mu \in \Delta$ , 則得  $\Delta$  上的一個右向量空間  $\mathfrak{R}^*$ . 這個結果可以直接驗證的; 但把這個結果納入 § 2 所論述的綫性變換的一般理論中, 則更易領悟.

為着這個目的, 我們要記住: 一個綫性函數恰是  $\mathfrak{R}$  到一維向量空間  $\Delta$  內的一個綫性變換. 在向量空間  $\Delta$  里, 因為右乘變換  $\mu_r: \xi \rightarrow \xi\mu$  使

$$(\xi + \eta)\mu_r = (\xi + \eta)\mu = \xi\mu + \eta\mu = \xi\mu_r + \eta\mu_r,$$

$$(\alpha\xi)\mu_r = (\alpha\xi)\mu = \alpha(\xi\mu) = \alpha(\xi\mu_r),$$

故右乘變換  $\mu_r$  是向量空間  $\Delta$  里一個綫性變換. 我們還知,  $\mathfrak{R}$  到  $\Delta$  內的綫性變換的集合在加法下是一個交換羣, 而  $\mathfrak{R}$  到  $\Delta$  內的一個綫性變換與  $\Delta$  到它自身內的一個綫性變換的積是  $\mathfrak{R}$  到  $\Delta$  內的一個綫性變換. 所以, 如果  $f, g \in \mathcal{L}(\mathfrak{R}, \Delta)$ , 則  $f + g$  及  $f\mu_r \in \mathcal{L}(\mathfrak{R}, \Delta)$ . 因為上面給出的  $f\mu$  的定義只是積  $f\mu_r$ , 故

$$(f + g)\mu = (f + g)\mu_r = f\mu_r + g\mu_r = f\mu + g\mu,$$

$$f(\mu + \nu) = f(\mu + \nu)_r = f(\mu_r + \nu_r) = f\mu_r + f\nu_r = f\mu + f\nu,$$

$$f(\mu\nu) = f(\mu\nu)_r = f(\mu_r\nu_r) = (f\mu_r)\nu_r = (f\mu)\nu,$$

$$f1 = f1_r = f.$$

這証明了上面的論斷: 綫性函數的集合  $\mathfrak{R}^*$  是  $\Delta$  上右向量空間. 我們叫它做向量空間  $\mathfrak{R}$  的共軛空間.

今設  $\mathfrak{R}$  是有限維向量空間, 有基為  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , 則綫性函數  $f$  可由值  $f(e_i) = \alpha_i$  完全決定. 不僅如此, 對於任意  $\alpha_i \in \Delta$ , 必有一個綫性函數存在使  $f(e_i) = \alpha_i$ . 如果  $x = \sum \xi_i e_i$ , 則  $f(x) = \sum \xi_i \alpha_i$ . 我們還可把這些結果用陣述出如次: 如果  $f$  是一個綫性函數, 並且  $f(e_i) = \alpha_i$ , 則可使用  $\Delta$  里的基 1, 而記  $f(e_i) = \alpha_i 1$ . 於是, 我們知道,  $f$  關於  $(e_1, e_2, \dots, e_n), (1)$  的陣是



$$(25) \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

这样我们就在  $\mathfrak{R}^*$  与元素在  $\Delta$  里的  $n \times 1$  陣的集合間得出一个 1—1 对应. 在这个对应下,  $f$  也保持对应. 我們还立知, 如果  $f$  有陣 (25), 則  $f\mu$  有陣为

$$\begin{bmatrix} \alpha_1\mu \\ \alpha_2\mu \\ \vdots \\ \alpha_n\mu \end{bmatrix}.$$

由此显見,  $\mathfrak{R}^*$  与  $n$ -維组 (这里写作列) 的右向量空間等价. 故知  $\mathfrak{R}^*$  是  $\Delta$  上  $n$  維向量空間.

依下面方法导出上面結果可更見明晰. 如果  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\Delta$  上  $\mathfrak{R}$  的一个基, 我們用方程

$$(26) \quad e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

来定义綫性函数的一个集合  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ , 这里  $i \neq j$  时,  $\delta_{ij} = 0$ , 而  $i = j$  时  $\delta_{ii} = 1$ . 則关于  $e_j$  的綫性函数  $\sum e_i^* \alpha_i$  的值是

$$\sum_i e_i^* \alpha_i(e_j) = \sum_i e_i^*(e_j) \alpha_i = \alpha_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

并且由此可推知,  $e_i^*$  构成  $\Delta$  上  $\mathfrak{R}^*$  的一个基. 为此, 如果  $f$  是任意綫性函数, 而  $f(e_j) = \alpha_j$ , 則  $f$  与  $\sum e_i^* \alpha_i$  对于  $e_j$  有同一的值. 于是,  $f = \sum e_i^* \alpha_i$ . 次令  $\sum e_i^* \alpha_i = 0$ , 則由上面方程指出每个  $\alpha_i = 0$ ; 故知  $e_i^*$  是綫性无关的. 基  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  叫做  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的余基. 这样的基在后面占重要的地位.

## 習 題 18

1. 証明: 右乘变换是向量空間  $\Delta$  里的唯一綫性变换.

**10. 有限維空間与它的共軛空間之間的对偶性** 令  $x$  是空間  $\mathfrak{R}$  里一个固定向量, 并令  $f$  周历  $\mathfrak{R}$  的共軛空間  $\mathfrak{R}^*$ . 則映照  $f \mapsto f(x)$  是  $\mathfrak{R}^*$  到  $\Delta$  內的一个映照. 为着強調表示我們是在处理  $f \in \mathfrak{R}^*$  的函数, 所以用  $x(f)$  来代替  $f(x)$ . 因为

$$x(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x(f) + x(g),$$

$$x(f\alpha) = (f\alpha)(x) = f(x)\alpha = x(f)\alpha,$$

故  $x(f)$  是綫性的。故知, 每个向量  $x \in \mathfrak{R}$  决定定义在  $\mathfrak{R}^*$  上的綫性函数的(左)向量空間  $\mathfrak{R}^{**}$  的一个元素  $x(f)$ 。

其次, 考虑  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{R}^{**}$  內的映照  $x \rightarrow x(f)$  的性質。首先, 因为

$$(x+y)(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = x(f) + y(f),$$

这說明与  $x+y$  連带的函数是  $x(f)$  与  $y(f)$  的和, 又因为

$$(\alpha x)(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha x(f),$$

故与  $\alpha x$  連带的綫性函数是与  $x$  連带的綫性函数的  $\alpha$  倍。所以, 这个映照是  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{R}^{**}$  內的綫性变换。次証:  $x \rightarrow x(f)$  是 1—1 的。这只要証明: 如果对于所有  $f$  使  $x(f) = 0$ , 則  $x = 0$ 。这是显然的; 因为, 如果  $x \neq 0$ , 則可取  $x$  作为基  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的第一个向量  $e_1$ 。我們已知, 对于任意給定的  $\alpha_i$ , 有一个綫性函数  $f$  存在使  $f(e_i) = \alpha_i$ 。特别是, 可找到一个  $f$  使  $f(x) = f(e_1) \neq 0$ 。

至此, 我們已經証明了映照  $x \rightarrow x(f)$  是  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{R}^{**}$  內的一个 1—1 綫性变换。所以, 如果  $\mathfrak{S}$  表示象空間, 則  $\dim \mathfrak{S} = \dim \mathfrak{R} = n$ 。另一方面, 我們已知,  $\dim \mathfrak{R} = \dim \mathfrak{R}^* = \dim \mathfrak{R}^{**}$ 。故  $\dim \mathfrak{S} = \dim \mathfrak{R}^{**}$ , 这自然可推出  $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}^{**}$ 。因此得到有力的結論:  $\mathfrak{R}^*$  上每个綫性函数可从  $\mathfrak{R}$  里某一个向量  $x$  的  $x(f)$  得出。这就是重要的对偶原理:  $\mathfrak{R}$  可使与  $\mathfrak{R}^*$  (上綫性函数的空間) 的共軛空間重合。作为这个結果的第一个应用, 我們来証明下面的定理。

**定理 10.** 如果  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个基, 則  $\mathfrak{R}$  有一个基  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  存在使  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ 。

証 我們已知, 在  $\mathfrak{R}^{**}$  里可找到一个基  $(e_1^{**}, e_2^{**}, \dots, e_n^{**})$ , 它是給定的基  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  的余基, 亦即  $e_i^{**}(e_j^*) = \delta_{ij}$ 。但在  $\mathfrak{R}$  里存在有向量  $e_1, e_2, \dots, e_n$  使  $e_j^*(e_i) = e_i^{**}(e_j^*)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 这些向量适合定理的要求。

其次要証:  $\mathfrak{R}$  的子空間与  $\mathfrak{R}$  的共軛空間  $\mathfrak{R}^*$  的子空間之間的互反关系。如果  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  的一个子空間, 令  $j(\mathfrak{S})$  是向量  $g \in \mathfrak{R}^*$  的全体, 它对于  $\mathfrak{S}$  里所有  $y$  能使  $g(y) = 0$  的。显然集合  $j(\mathfrak{S})$  是

$\mathfrak{R}^*$  的一个子空间, 我們叫它做与  $\mathfrak{S}$  关联的  $\mathfrak{R}^*$  的子空间. 同理, 如果  $\mathfrak{S}^*$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个子空间, 則得与  $\mathfrak{S}^*$  关联的子空间  $j(\mathfrak{S}^*)$ . 这个子空间由对于所有  $g \in \mathfrak{S}^*$  能使  $g(y) = 0$  的向量  $y$  构成. 如果  $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2$ , 显然  $j(\mathfrak{S}_1) \subseteq j(\mathfrak{S}_2)$ , 就是說, 对应  $\mathfrak{S} \rightarrow j(\mathfrak{S})$  是  $\mathfrak{R}$  的子空间的格  $L(\mathfrak{R})$  到  $\mathfrak{R}^*$  的子空间的格  $L(\mathfrak{R}^*)$  的反序对应. 显然还有  $j(j(\mathfrak{S})) \supseteq \mathfrak{S}$ . 次証下面的引理.

**引理** 对于任意  $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{R}$ ,  $\dim j(\mathfrak{S}) = n - \dim \mathfrak{S}$ , 而对于任意  $\mathfrak{S}^* \subseteq \mathfrak{R}^*$ ,  $\dim j(\mathfrak{S}^*) = n - \dim \mathfrak{S}^*$ .

**証** 由于  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{R}^*$  間的对偶性, 所以只要証明引理的前半段說法就够了. 令  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  的一个子空间, 并令  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基, 使  $(u_1, u_2, \dots, u_r)$  是  $\mathfrak{S}$  的一个基. 令  $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$  是  $\mathfrak{R}^*$  的余基. 今設  $g = \sum u_i^* \beta_i \in j(\mathfrak{S})$ , 則  $(\sum u_i^* \beta_i)(u_j) = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ). 但  $(\sum u_i^* \beta_i)(u_j) = \beta_j$ , 故  $g = \sum_{i=r+1}^n u_i^* \beta_i$ . 反

过来, 任意綫性形式  $g = \sum_{i=r+1}^n u_i^* \beta_i$  适合  $g(u_j) = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ). 故对于每个  $y \in \mathfrak{S}$ , 也有  $g(y) = 0$ . 于是,  $j(\mathfrak{S}) = [u_{r+1}^*, u_{r+2}^*, \dots, u_n^*]$ . 所以,  $\dim \mathfrak{S} = r$ , 而  $\dim j(\mathfrak{S}) = n - r$ .

这个引理的一个直接推論是: 对于任意  $\mathfrak{S}$  及  $\mathfrak{S}^*$ ,  $j(j(\mathfrak{S})) = \mathfrak{S}$  及  $j(j(\mathfrak{S}^*)) = \mathfrak{S}^*$ . 这因为, 已知  $j(j(\mathfrak{S})) \supseteq \mathfrak{S}$ ; 并且如果  $\dim \mathfrak{S} = r$ , 則  $\dim j(j(\mathfrak{S})) = n - (n - r) = r = \dim \mathfrak{S}$ , 由此就推得  $\mathfrak{S} = j(j(\mathfrak{S}))$ .

故知, 映照  $\mathfrak{S} \rightarrow j(\mathfrak{S})$  是  $L(\mathfrak{R})$  到  $L(\mathfrak{R}^*)$  上的一个 1—1 映照. 如果  $j(\mathfrak{S}_1) = j(\mathfrak{S}_2)$ , 則  $\mathfrak{S}_1 = j(j(\mathfrak{S}_1)) = j(j(\mathfrak{S}_2)) = \mathfrak{S}_2$ ; 而且如果  $\mathfrak{S}^*$  是  $L(\mathfrak{R}^*)$  的任意元素, 則  $\mathfrak{S}^* = j(\mathfrak{S})$ , 这里  $\mathfrak{S} = j(\mathfrak{S}^*)$ .

## 習 題 19

1. 証明: 如果  $\mathfrak{S} \rightarrow \bar{\mathfrak{S}}$  是一个格到另一个格上的一个 1—1 反序对应, 則  $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = \bar{\mathfrak{S}}_1 \cap \bar{\mathfrak{S}}_2$ , 而  $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = \bar{\mathfrak{S}}_1 + \bar{\mathfrak{S}}_2$ .

2. 令  $f$  是  $\mathfrak{R}$  上一个綫性函数, 而  $\bar{f}$  表示  $f$  在  $\mathfrak{R}$  的子空间  $\mathfrak{S}$  上的短縮, 亦即  $\bar{f}$  是映照  $y \rightarrow f(y)$ , 这里  $y \in \mathfrak{S}$ . 証明: 映照  $f \rightarrow \bar{f}$  是  $\mathfrak{R}^*$  到  $\mathfrak{S}$  上綫性函数的空间  $\mathfrak{S}^*$  内的一个綫性变换. 証明:  $j(\mathfrak{S})$  是这个变换的脑空间; 并証明  $f \rightarrow \bar{f}$  是  $\mathfrak{R}^*$  到  $\mathfrak{S}^*$  上的

一个映照。

3. 証明: 如果  $e_1^*, e_2^*, \dots, e_r^*$  是綫性无关的綫性函数, 則有向量  $e_1, e_2, \dots, e_r$  存在, 使  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, r)$ 。

**11. 綫性变换的折轉** 令  $A$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  的一个綫性变换, 并令  $f$  是定义在  $\mathfrak{R}_1$  上的一个綫性函数, 則映照  $x_1 \rightarrow f(x_1 A)$  是定义在  $\mathfrak{R}_1$  上的一个綫性函数; 理由, 因为这个映照不过是  $A$  与  $f$  的积, 亦即

$$(27) \quad (Af)(x_1) = f(x_1 A).$$

今令  $f$  在  $\mathfrak{R}_2$  的共軛空間  $\mathfrak{R}_2^*$  上变, 則得  $\mathfrak{R}_2^*$  到  $\mathfrak{R}_1^*$  內的一个映照  $f \rightarrow Af$ . 由分配律得

$$A(f + g) = Af + Ag$$

及由結合律得

$$A(f\mu) = A(f\mu_r) = (Af)\mu_r = (Af)\mu,$$

故知这个映照是綫性的; 我們把  $\mathfrak{R}_2^*$  到  $\mathfrak{R}_1^*$  內的这个綫性变换  $f \rightarrow Af$  叫做  $A$  的折轉, 記做  $A^*$ . 于是  $fA^* = Af$ , 这里右端的  $Af$  是  $A$  与  $f$  的积.

其次, 考虑映照  $A \rightarrow A^*$  的性質. 首先, 如果  $B$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  的另一个綫性变换, 則  $A + B \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ ,

$$\begin{aligned} f(A + B)^* &= (A + B)f = Af + Bf \\ &= fA^* + fB^* = f(A^* + B^*). \end{aligned}$$

故得

$$(28) \quad (A + B)^* = A^* + B^*.$$

今令  $\mathfrak{R}_3$  是第三个向量空間, 并令  $C$  是  $\mathfrak{R}_2$  到  $\mathfrak{R}_3$  內的一个綫性变换, 則  $AC \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_3)$ . 所以, 如果  $h \in \mathfrak{R}_3^*$ , 則  $h(AC)^* = (AC)h \in \mathfrak{R}_1^*$ . 另一方面,

$$\begin{aligned} h(AC)^* &= (AC)h = A(CH) = A(hC^*) \\ &= (hC^*)A^* = h(C^*A^*), \end{aligned}$$

这就証明了

$$(29) \quad (AC)^* = C^*A^*.$$

这些結果当然也适用于右向量空間. 特別是, 如果  $A^*$  是綫

性函数的右向量空間  $\mathfrak{R}_2^*$  到右向量空間  $\mathfrak{R}_1^*$  內的一个綫性变換. 則我們可把  $\mathfrak{R}_1^{**}$  到  $\mathfrak{R}_2^{**}$  內的折轉变換与它联系起来, 这里  $\mathfrak{R}_i^{**}$  是  $\mathfrak{R}_i^*$  上綫性函数的左向量空間. 另一方面, 我們有  $\mathfrak{R}_i^{**}$  到  $\mathfrak{R}_i$  上的自然等价, 而这些使我們能够定义  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  內与  $A^*$  的折轉成对应的一个綫性变換. 这个变換叫做在  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  里  $A^*$  的折轉  $A^{**}$ . 今决定  $\mathfrak{R}_2^*$  到  $\mathfrak{R}_1^*$  內的給定綫性变換  $A^*$  的变換  $A^{**}$ . 令  $f$  在  $\mathfrak{R}_2^*$  上变, 并且令  $x_1$  是  $\mathfrak{R}_1$  里确定的向量, 則映照

$$f \mapsto x_1(fA^*) \equiv (fA^*)(x_1) \in \Delta$$

是  $\mathfrak{R}_2^*$  上一个綫性函数. 于是, 存在着唯一决定的向量  $x_2 \in \mathfrak{R}_2$  使对于所有  $f \in \mathfrak{R}_2^*$ ,

$$(30) \quad (fA^*)(x_1) = x_1(fA^*) = x_2(f) \equiv f(x_2)$$

成立. 故得  $x_1$  映到  $x_2$  的一个映照  $A^{**}$ . 上面論証指出这个映照是綫性的; 这也可以直接予以驗証.

今將証明: 两个对应  $A \mapsto A^*$  及  $A^* \mapsto A^{**}$  是互逆的; 亦即: 如果  $A^*$  是  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  的折轉, 則在  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  里  $A^*$  的折轉是  $A$ , 并且如果  $A^{**}$  是在  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  里  $A^* \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2^*, \mathfrak{R}_1^*)$  的折轉, 則  $A^{**}$  的折轉是  $A^*$ . 要証前者, 我們由  $A^{**}$  的定义知,  $(fA^*)(x_1) = f(x_1A^{**})$ . 于是,  $f(x_1A) = f(x_1A^{**})$ , 而  $f(x_1A - x_1A^{**}) = 0$  对于所有  $f$  都成立. 但我們已知 (參看 § 10), 由此可推得  $x_1A = x_1A^{**}$  对于所有  $x_1$  成立, 故  $A = A^{**}$ . 要証后者, 可使用关系

$$(fA^*)(x_1) = f(x_1A^{**}) = (fA^{***})(x_1).$$

因为这对于所有  $x$  都成立, 所以  $fA^* = fA^{***}$ , 从而  $A^* = A^{***}$ . 由此立知, 映照  $A \mapsto A^*$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  到  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2^*, \mathfrak{R}_1^*)$  上的 1—1 映照.

在  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$  及  $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}^*, \mathfrak{R}^*)$  这种特殊情形, 映照  $A \mapsto A^*$  是这两个环間的一种反同构; 这易由 1—1 性及方程 (28) 与 (29) 得出.

**12. 折轉的陣** 令  $A$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  內的一个綫性变換, 并令  $(e_1, e_2, \dots, e_{n_1}), (f_1, f_2, \dots, f_{n_2})$  是这两个空間的基. 在空間  $\mathfrak{R}_1^*, \mathfrak{R}_2^*$  里取余基  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_{n_1}^*), (f_1^*, f_2^*, \dots, f_{n_2}^*)$ , 則

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}, \quad f_p^*(f_q) = \delta_{pq}.$$

今設  $(\alpha)$  及  $(\beta)$  順序是  $A$  及它的折轉關於這些基的陣, 則

$$e_i A = \sum_p a_{ip} f_p, \quad f_q^* A^* = \sum_j e_j^* \beta_{jq}.$$

因為  $f_q^*(e_i A) = f_q^* A^*(e_i)$ , 所以

$$f_q^* \left( \sum_p a_{ip} f_p \right) = \sum_j (e_j^* \beta_{jq})(e_i).$$

於是,  $a_{iq} = \beta_{iq}$ , 而  $(\alpha) = (\beta)$ . 換句話說, 如果在  $\mathfrak{R}_i$  ( $i = 1, 2$ ) 里及在  $\mathfrak{R}_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) 里使用相餘的基, 則  $A$  的陣與  $A$  的折轉的陣相等.

這個結果或者有點突然. 它的說明基於左向量空間與右向量空間里綫性變換的陣的定義. 在  $\Delta = \Phi$  是一個域的特殊情形下, 這結果通常以某種不同形式出現. 本書考慮的空間慣例都是左向量空間, 這可由以  $\alpha x$  代  $x\alpha$  來實現. 於是, 上面導出的關係  $f_q^* A^* = \sum_j e_j^* a_{jq}$  可記為

$$f_q^* A^* = \sum_j e_j^* a_{jq} = \sum_j a_{jq} e_j^* = \sum_j a'_{qj} e_j^*,$$

這里  $a'_{qj} = a_{jq}$ . 所以, 如果把  $\mathfrak{R}_i^*$  作為左向量空間, 則  $A^*$  的陣是  $A$  的陣  $(\alpha)$  的折轉陣  $(\alpha)'$ . 如果  $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$ , 則順序得綫性變換環  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$  與  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}^*, \mathfrak{R}^*)$  到陣環  $\Phi_n$  上的同構  $A \mapsto (\alpha)$  與  $A^* \mapsto (\alpha)'$ . 因為  $A \mapsto A^*$  是一個反同構, 故知映照  $(\alpha) \mapsto (\alpha)'$  是  $\Phi_n$  里一個反同構, 亦即  $(\alpha) \mapsto (\alpha)'$  是 1—1 對應, 並且

$$[(\alpha) + (\beta)]' = (\alpha)' + (\beta)', \quad [(\alpha)(\beta)]' = (\beta)'(\alpha)'. \quad \cdot$$

這個當然也可以直接驗證的.

今回復到任意除環這個一般情形, 並且在一個綫性變換及它的折轉變換的秩空間與腦空間之間建立下面的關係.

**定理 11.**  $A$  的腦空間是與  $A$  的折轉  $A^*$  的秩空間關聯的子空間.  $A$  的秩空間是與  $A^*$  的腦空間關聯的子空間.

証 我們只要証明定理的前半段就够了. 所以, 令  $z$  是使  $zA = 0$  的一個向量; 於是, 對於所有  $f$ ,  $f(zA) = 0$ , 從而  $(fA^*)(z) = 0$ . 故  $z \in j(\mathfrak{R}_2^* A^*)$ . 逆定理的証明可從倒轉各個步驟而得.

至此可証

**定理 12.**  $A$  的秩等于  $A^*$  的秩.

証  $A^*$  的秩  $= \dim(\mathfrak{R}_j^* A^*) = \dim j(\mathfrak{N})$ , 这里  $\mathfrak{N}$  是  $A$  的核空間, 还有  $\dim j(\mathfrak{N}) = n_1 - \dim \mathfrak{N}$ , 这里  $n_1 = \dim \mathfrak{R}_1 = \dim \mathfrak{R}_1^*$ . 另一方面, 有  $A$  的秩  $= n_1 - \dim \mathfrak{N}$ , 故  $A$  的秩等于  $A^*$  的秩.

如果  $(\alpha)$  是任意陣, 則  $(\alpha)$  可用为綫性变换  $A$  的陣, 也可用为  $A$  的折轉  $A^*$  的陣. 由于我們已知  $A$  的秩是  $(\alpha)$  的行秩, 而  $A^*$  的秩是  $(\alpha)$  的列秩. 故定理 12 給出任意陣的两种秩相等的定理以一个几何証明.

**13. 射影** 今来討論与一个向量空間对于子空間的直接分解有密切联系的一种綫性变换, 作为本章的結束. 設  $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_r$ , 亦即  $\mathfrak{N}$  是子空間  $\mathfrak{R}_i$  的直接和 (参看第一章的 § 11). 如果  $x$  是  $\mathfrak{N}$  里任意向量, 則  $x$  可写成

$$(31) \quad x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r,$$

这里  $x_i \in \mathfrak{R}_i$ . 我們还知道, 对于一个給定的  $i$ ,  $x$  在  $\mathfrak{R}_i$  里的分量  $x_i$  是唯一的. 所以, 把  $x$  映到  $x_i$  的映照  $E_i$  是单值的. 今来考察这些映照的性质. 令  $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_r$ ,  $y_i \in \mathfrak{R}_i$ , 則

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_r + y_r),$$

这里  $x_i + y_i \in \mathfrak{R}_i$ . 因此  $x + y$  在  $\mathfrak{R}_i$  里的分量是  $x_i + y_i$ . 故得下面关于  $E_i$  的条件:

$$(x + y)E_i = xE_i + yE_i.$$

又由(31)得

$$\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_r,$$

故  $\alpha x$  在  $\mathfrak{R}_i$  里的分量是  $\alpha x_i$ . 換句話說, 我們有关系

$$(\alpha x)E_i = \alpha(xE_i).$$

故知,  $E_i$  是  $\Delta$  上向量空間  $\mathfrak{N}$  里的一个綫性变换.

其次, 考虑存在于  $E_i$  間的关系. 首先是(31)可改写成

$$(32) \quad x = xE_1 + xE_2 + \cdots + xE_r,$$

故

$$(33) \quad E_1 + E_2 + \cdots + E_r = 1.$$

如果  $x_i \in \mathfrak{R}_i$ , 则  $x = x_i$  的表达式(31)化为  $x_i = x_i$ , 故  $x_i E_i = x_i$ , 而  $j \neq i$  时  $x_i E_j = 0$ . 所以对于任意  $x$  有  $x E_i = x_i \in \mathfrak{R}_i$ . 故知  $x E_i^2 = x_i E_i = x_i = x E_i$ , 而  $x E_i E_j = x_i E_j = 0$ . 于是, 得下面的方程:

$$(34) \quad E_i^2 = E_i, \quad E_i E_j = 0 \quad (i \neq j).$$

同势的綫性变换  $E$ , 亦即  $E$  等于它的平方 ( $E^2 = E$ ), 通常叫做射影. 如果射影的一个集合里任意两个不同的射影的积等于 0, 則說这个集合是正交射影集合. 如果正交射影  $E_1, E_2, \dots, E_r$  的和是恒等映照, 則它們的集合叫做补集合. 于是, 上面关于由分解  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_r$  所决定的映照  $E_i$  的结果是: 这些映照构成正交射影的一个补集合. 今将証明: 正交射影的每个有限补集合都是这样得到. 譬如, 令  $E_1, E_2, \dots, E_r$  是这样一个集合, 令  $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R} E_i$  是  $E_i$  的秩空間. 如果  $x$  是  $\mathfrak{R}$  里任意向量, 則

$$x = x1 = x(\sum E_i) = x E_1 + x E_2 + \dots + x E_r, \\ \in \mathfrak{R} E_1 + \mathfrak{R} E_2 + \dots + \mathfrak{R} E_r.$$

故  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots + \mathfrak{R}_r$ . 次令

$$(35) \quad z_i = z_1 + \dots + z_{i-1} + z_{i+1} + \dots + z_r,$$

这里  $z_i \in \mathfrak{R}_i$ . 因为  $z_i$  的形状是  $y_i E_i$ ,  $z_i E_i = y_i E_i^2 = y_i E_i = z_i$ ; 仿此, 如果  $j \neq i$ , 則  $z_j E_i = y_j E_j E_i = 0$ . 所以, 如果我們在(35)的左端施行变换  $E_i$ , 則得  $z_i$ , 而在右端施行时則得 0; 故  $z_i = 0$ . 这証明了

$$\mathfrak{R}_i \cap (\mathfrak{R}_1 + \dots + \mathfrak{R}_{i-1} + \mathfrak{R}_{i+1} + \dots + \mathfrak{R}_r) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, r).$$

故  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_r$ . 因为  $x = \sum x E_i$ , 而  $x E_i = x_i \in \mathfrak{R}_i$ ; 于是, 由这个分解所决定的射影是映照  $x \rightarrow x E_i$ , 亦即給定的綫性变换  $E_i$ . 所以, 我們在向量空間的直接分解与正交射影的有限补集合之間建立了一个 1—1 对应.

其次, 是求正交射影  $E_1, E_2, \dots, E_r$  的补集合的典型基. 令  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_r$ , 則可得  $\mathfrak{R}$  的一个基  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  使  $(f_1, \dots, f_{\rho_1})$  是  $\mathfrak{R}_1$  的一个基,  $(f_{\rho_1+1}, \dots, f_{\rho_1+\rho_2})$  是  $\mathfrak{R}_2$  的一个基,  $\dots$ . 于是,  $\rho_i = E_i$  的秩, 因为  $j \neq i$  时  $E_j E_i = 0$ , 故綫性变换  $E_i$  除了



第  $i$  个子集合  $(f_{\rho_1+\dots+\rho_{i-1}+1}, \dots, f_{\rho_1+\dots+\rho_i})$  外, 把所有  $f$  都零化了. 因为  $E_i^2 = E_i$ , 故  $E_i$  把  $\mathfrak{R}_i := \mathfrak{R}E_i$  里任意向量映到它自身内. 于是,  $E_i$  关于基  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  的阵是对角阵

$$(36) \quad (\delta_i) = \text{diag} \{0, \dots, 0, \overbrace{1, \dots, 1}^{\rho_i}, 0, \dots, 0\},$$

在这里除了第  $\rho_1 + \dots + \rho_{i-1} + 1$  到第  $\rho_1 + \dots + \rho_i$  各行外, 余下的元素都是 0.

今摘去  $\sum E_i = 1$  的假设, 亦即设  $E_1, E_2, \dots, E_r$  是正交射影的任意有限集合. 令  $E = \sum_{i=1}^r E_i$ , 而  $E_{r+1} = 1 - E$ . 因为在  $i, j \leq r$  而  $i \neq j$  时  $E_i E_j = 0$ , 故  $E^2 = \sum E_i^2 = \sum E_i = E$ . 又  $E_{r+1}^2 = (1 - E)^2 = 1 - 2E + E^2 = 1 - 2E + E = 1 - E = E_{r+1}$ . 还有在  $j \leq r$  时  $E_j E = E_j \sum E_i = E_j^2 = E_j$  及  $E E_j = E_j$ . 故知  $E_j E_{r+1} = E_j (1 - E) = E_j - E_j E = E_j - E_j = 0$ ; 同理也有  $E_{r+1} E_j = 0$ . 因此就证明了集合  $E_1, E_2, \dots, E_{r+1}$  是正交射影的补集合. 上面讨论指出:  $\mathfrak{R}$  里存在一个基  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  使  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) 关于这个基的阵的形状是 (36).

这些论述也适用于单一同势线性变换. 如果  $E_1$  是属于这个类型, 则  $E_1$  及  $E_2 = 1 - E_1$  是正交的及互补的.  $E_1$  关于适当的基的阵的形状是  $\text{diag} \{1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}$ ; 这里 1 的个数等于  $E_1$  的秩.

## 习 题 20

1. 证明下面关于阵的定理: 如果  $(e_1), (e_2), \dots, (e_r)$  是阵的集合, 使  
(37)  $(e_i)^2 = (e_i)$ ,  $i \neq j$  时  $(e_i)(e_j) = 0$ ,  
则在  $L(\Delta, n)$  里存在有阵  $(\mu)$  使  $(\mu)(e_i)(\mu)^{-1}$  的形状是 (36).
2. 证明: 两个射影  $E$  及  $F$  有相同的秩空间必须而且只须  $EF = E$  及  $FE = F$ ; 并证明: 它们有相同的零空间必须而且只须  $EF = F$ ,  $FE = E$ .
3. 证明: 如果  $E_1, E_2, \dots, E_k$  是有相同秩空间的射影, 而  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  是  $\Delta$  的元素使  $\sum \alpha_i = 1$ , 则  $\sum \alpha_i E_i$  是与  $E_i$  有相同的秩空间的一个射影.
4. 设  $\Delta$  的特征数  $\neq 2$  (就是说: 在  $\Delta$  里, 如果  $\alpha \neq 0$ , 则  $2\alpha = \alpha + \alpha \neq 0$ ), 证明: 如果  $E_1$  与  $E_2$  都是射影, 它们的和也是一个射影, 则  $E_1$  与  $E_2$  是正交射影.
5. 证明: 如果  $E_1$  与  $E_2$  是可交换的射影, 则  $E_1 E_2$  及  $E_1 + E_2 - E_1 E_2$  都是射影.

## 第 三 章

### 单独一个綫性变换的理論

本章专討論域上向量空間里的单綫性变换，我們將获得向量空間关于一个給定的綫性变换分解为叫做循环子空間的分解法，在这些空間里选取适当的基可得变换的某种典型陣。这些結果提供陳的相似的充要条件。我們照克魯尔 (Krull) 方法使用有限生成  $\mathfrak{o}$ -模导出基本的分解定理，这里  $\mathfrak{o}$  是一个主理想整环。在本章里我們还証明关于陣的特征多項式及最低多項式的汉米頓 (Hamilton)-凱萊 (Cayley) 定理及福路本紐斯 (Frobenius) 定理。末了我們研究与一个給定变换可交換的綫性变换的代数。

**1. 綫性变换的最低多項式** 本章里假定用作基础的除环是域，并用  $\Phi$  表示这个域。令  $\mathfrak{R}$  是  $\Phi$  上向量空間，并且令  $\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$  是  $\mathfrak{R}$  到它自身內的綫性变换的集合。我們知道， $\mathfrak{L}$  可看作  $\Phi$  上一个代数，亦即：1)  $\mathfrak{L}$  是一个环；2)  $\mathfrak{L}$  是  $\Phi$  上一个向量空間，它的加法与环的加法相同；3) 对于  $A, B \in \mathfrak{L}$  及  $\gamma \in \Phi$ ,

$$\gamma(AB) = (\gamma A)B = A(\gamma B)$$

成立。积  $\gamma A$  定义为积  $\gamma_l A = A \gamma_l$ 。我們还令  $\mathfrak{L}$  是  $\Phi$  上  $n^2$  維空間。

今令  $A$  是  $\mathfrak{R}$  里一个任意綫性变换，并令  $[1, A, A^2, \dots]$  是由  $A$  的幂生成的  $\mathfrak{L}$  的子空間。如果  $A$  不是 1 的倍量，則  $(1, A)$  是綫性无关集合。如果  $A^2$  与  $(1, A)$  不是綫性相关的，由于  $(1, A)$  是綫性无关集合，所以  $(1, A, A^2)$  也是如此。这样繼續下去，得綫性无关集合  $(1), (1, A), (1, A, A^2), (1, A, A^2, A^3), \dots$ 。

因为  $\mathfrak{L}$  的維数有限，故經過有限个步驟后，这个方法必須終止进行。在第一次达到  $A$  的幂  $A^m$  与前面各幂綫性相关时这种情况就出現。于是  $(1, A, A^2, \dots, A^{m-1})$  是綫性无关的，而  $A^m \in [1,$

$A, A^2, \dots, A^{m-1}]$ . 故得形状如

$$(1) \quad A^m = \mu_0 1 + \mu_1 A + \dots + \mu_{m-1} A^{m-1}$$

的一个关系, 这里  $\mu_i \in \Phi$ . 以  $A$  乘(1), 则借分配律及上面的代数条件 3) 得方程

$$A^{m+1} = \mu_0 A + \mu_1 A^2 + \dots + \mu_{m-1} A^m.$$

因为  $A^m \in [1, A, A^2, \dots, A^{m-1}]$ , 就可見  $A^{m+1} \in [1, A, A^2, \dots, A^{m-1}]$ . 同理可証:  $A^{m+2}, A^{m+3}, \dots$  都属于  $[1, A, A^2, \dots, A^{m-1}]$ . 故

$$[1, A, A^2, \dots] = [1, A, A^2, \dots, A^{m-1}];$$

又因为右端上  $A^k$  的集合是綫性无关的, 故知  $[1, A, A^2, \dots]$  有  $(1, A, A^2, \dots, A^{m-1})$  做它的基.

今探討关系(1)的一个重要解释. 首先我們知道, 映照

$$(2) \quad \alpha \mapsto \alpha 1 = \alpha_1$$

是  $\Phi$  到  $\mathfrak{L}$  内的一个同构; 这因为

$$(3) \quad \begin{aligned} (\alpha + \beta)1 &= \alpha 1 + \beta 1, \\ (\alpha\beta)1 &= (\alpha\beta)(1^2) = \alpha(\beta(1^2)) = \alpha(1(\beta 1)) = (\alpha 1)(\beta 1). \end{aligned}$$

如果  $\alpha \neq 0$ , 則  $\alpha 1 \neq 0$ , 故这个映照是 1—1 的. 所以象集合  $\Phi 1$  是与  $\Phi$  同构的  $\mathfrak{L}$  的一个子域.

今令  $\Phi[\lambda]$  表示含有超越元素 (不定量)  $\lambda$  而系数在  $\Phi$  内的多项式整区. 綫性变换  $A$  是与每个元素  $\alpha 1 (= \alpha_1)$  可交換的, 故由此知映照

$$(4) \quad f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots \mapsto f(A) \equiv \alpha_0 1 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots$$

是  $\Phi[\lambda]$  到  $\mathfrak{L}$  内的一个同态. 这个同态是同构(2)的扩张, 而它的特性是把  $\lambda$  映到  $A$ . 令  $\mathfrak{R}$  是这个同态的核, 亦即  $\mathfrak{R}$  是使  $v(A) = 0$  的多项式  $v(\lambda)$  的理想. 我們知道,  $\Phi[\lambda]$  是一个主理想整区<sup>1)</sup>, 就是說,  $\Phi[\lambda]$  里每个理想必是一个特殊多项式的倍式所构成. 特别是,  $\mathfrak{R} = (\mu(\lambda))$  是  $\mu(\lambda)$  的倍式的集合; 如果取生成元素  $\mu(\lambda)$  的首項系数为 1, 则这生成元素是唯一决定的. 由关系(1)得

---

1) 例如參看本书第一卷的第三章, § 5.

$$A^m - \mu_{m-1}A^{m-1} - \mu_{m-2}A^{m-2} - \cdots - \mu_0 1 = 0,$$

故知非零多項式

$$(5) \quad \lambda^m - \mu_{m-1}\lambda^{m-1} - \mu_{m-2}\lambda^{m-2} - \cdots - \mu_0$$

属于  $\mathfrak{R}$ . 故由前此建立的結果指出  $\mathfrak{R} \neq 0$ . 我們要注意到, 由 (1) 所決定的多項式 (5) 是  $\mathfrak{R}$  的生成元素  $\mu(\lambda)$ ; 这因为, 否則必有次数低于  $m$  的多項式存在使  $A^r + \nu_{r-1}A^{r-1} + \cdots + \nu_0 = 0$ , 而与  $1, A, \cdots, A^r$  是綫性无关的相矛盾.

这样的多項式  $\mu(\lambda)$  叫做綫性变换  $A$  的最低多項式; 它的特性是: 1) 首項系数 = 1; 2)  $\mu(A) = 0$ ; 3) 如果  $\nu(\lambda)$  是使  $\nu(A) = 0$  的任意多項式, 則  $\nu(\lambda)$  是  $\mu(\lambda)$  的倍式.

$\mathfrak{L}$  与陣环  $\Phi_n$  之間的同构使我們能够把上面导出的結果轉移到陣上. 令  $(\alpha)$  是  $A$  关于  $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$  的陣, 則  $\beta_0 1 + \beta_1 A + \cdots + \beta_k A^k$  关于这个基的陣是  $\beta_0 1 + \beta_1(\alpha) + \cdots + \beta_k(\alpha)^k$ . 所以, 如果由 (5) 給出的多項式  $\mu(\lambda)$  是  $A$  的最低多項式, 則

$$\mu((\alpha)) \equiv (\alpha)^m - \mu_{m-1}(\alpha)^{m-1} - \cdots - \mu_0 1 = 0.$$

反过来, 含有  $(\alpha)$  的关系可推出  $A$  的对应关系. 因此可知,  $\mu(\lambda)$  是有  $(\alpha)$  为根的最低次多項式. 由于这个理由, 我們也把  $\mu(\lambda)$  叫做陣  $(\alpha)$  的最低多項式.

## 習 題 21

1. 对于任意代数証明法则:  $(\alpha\beta)(xy) = (\alpha x)(\beta y)$ .
2. 一个非零的同势綫性变换的最低多項式是什么?
3. 令  $\mathfrak{R}$  是次数  $\leq n-1$ , 并且有实系数的多項式的向量空間, 求微分算子  $D$  的最低多項式, 及使  $f(\lambda)A = f(\lambda+1)$  的綫性变换  $A$  的最低多項式.

**2. 循环子空間** 在綫性变换  $A$  的研究中, 关于  $A$  不变的子空間  $\mathfrak{S}$  的发现是特饒兴趣的, 这时  $A$  把这些子空間映到它們自身內. 如果  $\mathfrak{S}$  是这样一個子空間, 則  $A$  在  $\mathfrak{S}$  里誘导出一个映照; 显然这个映照是一个綫性变换.

不变子空間的最簡單类型是由单一向量生成的一个不变子空間. 令  $u$  是  $\mathfrak{R}$  里一个特別向量, 并且令  $\mathfrak{S}$  表示包含  $u$  的最小不变子空間. 因为  $u \in \mathfrak{S}$ , 故  $uA \in \mathfrak{S}$ ; 于是  $uA^2 = (uA)A$ ,  $uA^3 =$

$(uA^2)A, \dots$  也  $\in \mathfrak{S}$ ; 因此

$$[u, uA, uA^2, \dots] \subseteq \mathfrak{S}.$$

另一方面, 如果  $v$  是空間  $[u, uA, \dots]$  里任意向量, 則

$$\begin{aligned} v &= \alpha_0 u + \alpha_1 uA + \dots + \alpha_r uA^r \\ &= uf(A), \end{aligned}$$

这里  $f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_r \lambda^r$ . 所以,  $vA = uf(A)A \in [u, uA, \dots]$ . 因此, 这个空間是不变的, 并且  $[u, uA, uA^2, \dots]$  是  $\mathfrak{R}$  里含有向量  $u$  的最小不变子空間. 我們把  $[u, uA, \dots]$  記作  $\{u\}$ , 而叫这个空間做由向量  $u$  生成的(关于  $A$  的)循环空間.

今設  $u \neq 0$ , 并令  $uA^r (r \geq 1)$  是序列  $u, uA, uA^2, \dots$  里最先与它的前面向量綫性相关的向量, 則仿前此关于  $A$  的幕的討論得

$$(6) \quad \{u\} = [u, uA, \dots, uA^{r-1}],$$

而  $(u, uA, \dots, uA^{r-1})$  是这个空間的一个基. 我們还有如

$$uA^r = v_0 u + v_1 uA + \dots + v_{r-1} uA^{r-1}$$

形状的关系, 或者写成  $u\mu_u(A) = 0$ , 这里

$$(7) \quad \mu_u(\lambda) = \lambda^r - v_{r-1}\lambda^{r-1} - \dots - v_0.$$

由  $r$  的选法显見  $\mu_u(\lambda)$  是具有性質  $u\mu_u(A) = 0$  的最低次非零多項式.  $\mu_u(\lambda)$  叫做向量  $u$  的指导多項式.

今就使  $uv(A) = 0$  的多項式  $v(\lambda)$  的全体  $\mathfrak{S}_u$  來說, 易知  $\mathfrak{S}_u$  是  $\Phi[\lambda]$  里一个理想. 正次数的多項式  $\mu_u(\lambda) \in \mathfrak{S}_u$ , 并且是这个理想里一个最低次非零多項式. 故  $\mathfrak{S}_u = (\mu_u(\lambda))$ . 末了, 我們看出:  $\mu_u(\lambda)$  是  $A$  在  $\{u\}$  里誘導出的綫性变換的最低多項式  $\bar{\mu}(\lambda)$ : 这因为, 如果  $v$  是  $\{u\}$  里任意向量, 則  $v = uf(A)$ , 故

$$v\mu_u(A) = uf(A)\mu_u(A) = u\mu_u(A)f(A) = 0f(A) = 0.$$

于是, 在  $\{u\}$  里  $\mu_u(A) = 0$ : 因此,  $\bar{\mu}(\lambda) | \mu_u(\lambda)$ . 另一方面有  $u\bar{\mu}(A) = 0$ , 故  $\bar{\mu}(\lambda) \in \mathfrak{S}_u$ , 从而  $\mu_u(\lambda) | \bar{\mu}(\lambda)$ . 由这两个关系推得  $\bar{\mu}(\lambda) = \mu_u(\lambda)$ .

如果  $u = 0$ , 則  $\{u\} = 0$ . 此时  $\mathfrak{S}_u = (1)$ , 我們就說: 指导多項式是 1.

如果  $\mu(\lambda)$  是  $A$  的最低多項式, 則  $\mu(A) = 0$ , 而  $u\mu(A) = 0$ .

故  $A$  的最低多項式是各个指导多項式  $\mu_{e_i}(\lambda)$  的倍式.

**3. 用最低多項式为指导的向量的存在** 令  $e_1, e_2, \dots, e_r$  是向量的一个集合, 它們关于  $A$  生成  $\mathfrak{R}$ ; 就是說,  $\mathfrak{R}$  里每个向量  $x$  可

由在  $\Phi[\lambda]$  里取适宜的  $\phi_i(\lambda)$  而表达为  $x = \sum_1^r e_i \phi_i(A)$  的形状.

这样的有限集合是存在的; 这因为, 任意普通的基具有这个性质.

令  $\bar{\mu}(\lambda)$  是指导多項式  $\mu_{e_i}(\lambda)$  的最低公倍式  $[\mu_{e_1}(\lambda), \mu_{e_2}(\lambda), \dots, \mu_{e_r}(\lambda)]$ . 因为每个  $\mu_{e_i}(\lambda)$  是  $A$  的最低多項式  $\mu(\lambda)$  的一个因子,

所以  $\bar{\mu}(\lambda) \mid \mu(\lambda)$ . 另一方面, 如果  $x = \sum e_i \phi_i(A)$ , 則

$$x \bar{\mu}(A) = \sum e_i \phi_i(A) \bar{\mu}(A) = \sum e_i \bar{\mu}(A) \phi_i(A) = 0.$$

于是,  $\bar{\mu}(A) = 0$ , 由此并推得  $\mu(\lambda) \mid \bar{\mu}(\lambda)$ . 故  $\mu(\lambda) = \bar{\mu}(\lambda)$ . 所

以  $A$  的最低多項式是生成元素的任意集合的各指导多項式的最小公倍式. 这推广了在循环子空間情形所建立的结果.

今把  $\mu_{e_i}(\lambda)$  用相同的素因子的积列出, 令

$$\mu_{e_i}(\lambda) = \pi_1(\lambda)^{k_{1i}} \pi_2(\lambda)^{k_{2i}} \cdots \pi_s(\lambda)^{k_{si}},$$

这里各个  $\pi_i$  都不相同, 并且  $k_{ji} \geq 0$ . 我們还可設  $\pi_i$  的首項系数都是 1. 如果  $k_j = \max(k_{j1}, k_{j2}, \dots, k_{jr})$ , 則多項式

$$\pi_1(\lambda)^{k_1} \pi_2(\lambda)^{k_2} \cdots \pi_s(\lambda)^{k_s} = \bar{\mu}(\lambda) = \mu(\lambda).$$

通常如果指导多項式  $\mu_r(\lambda) = \mu_1(\lambda) \mu_2(\lambda)$ , 則  $y = x \mu_1(A)$  的指导多項式是  $\mu_2(\lambda)$ ; 这可立即証明的. 应用这个结果可見: 如果  $k_1 = k_{1i_1}$ , 則

$$f_1 = e_{i_1} \pi_2(\lambda)^{k_{2i_1}} \pi_3(\lambda)^{k_{3i_1}} \cdots \pi_s(\lambda)^{k_{si_1}}$$

的指导多項式是  $\pi_1(\lambda)^{k_1}$ . 仿此, 可找指导多項式  $\pi_j(\lambda)^{k_j}$  的一个向量  $f_j (j = 2, \dots, s)$ . 今將証明向量

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_s$$

有指导多項式  $\mu_f(\lambda) = \mu(\lambda)$ . 这可由下面更一般结果得出:

**引理** 如果  $f_i$  的指导多項式  $\mu_i(\lambda) (i = 1, 2, \dots, s)$  是兩兩互素的, 則  $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_s$  的指导多項式是積  $v(\lambda) = \prod \mu_i(\lambda)$ .

**証** 因为对于每个  $i$ ,  $f_i \mu_i(A) = 0$ , 所以  $f_v(A) = \sum f_i v(A) = 0$ .

于是,  $\mu_f(\lambda) \mid v(\lambda)$ . 其次, 我們知道: 如果  $\rho_1(\lambda) = \mu_f(\lambda)\mu_2(\lambda)\mu_3(\lambda)\cdots\mu_s(\lambda)$ , 則  $f\rho_1(A) = 0$ , 而  $f_i\rho_i(A) = 0$  ( $i = 2, 3, \cdots, s$ ). 所以, 还有  $f_1\rho_1(A) = 0$ . 这就推得  $\mu_1(\lambda) \mid \rho_1(\lambda)$ . 因为  $\mu_1(\lambda)$  与  $\mu_2(\lambda), \cdots, \mu_s(\lambda)$  互素, 故  $\mu_1(\lambda) \mid \mu_f(\lambda)$ . 同理,  $\mu_2(\lambda) \mid \mu_f(\lambda)$ ,  $\mu_3(\lambda) \mid \mu_f(\lambda), \cdots$ . 于是,  $v(\lambda) = \Pi \mu_i(\lambda)$  是  $\mu_f(\lambda)$  的一个因子, 故  $\mu_f(\lambda) = v(\lambda)$ . 証明就完成了.

上面討論給出下面的定理.

**定理 1.**  $\mathfrak{R}$  里存在一个向量, 它的指導多項式是  $A$  的最低多項式.

我們知道, 任意向量  $u$  的指導多項式的次數是空間  $\{u\}$  的維數, 所以  $\deg \mu_u(\lambda) \leq n$ . 故得

**系**  $A$  的最低多項式的次數  $\leq n$ .

## 習題 22

1. 使用本节的方法証明: 如果  $m$  是有限交換羣  $G$  的元素的最大阶数, 則对于  $G$  里所有  $x$  都适合  $x^m = 1$ .

**4. 循环綫性变换** 如果存在有由单独一个向量  $e$  生成空間  $\mathfrak{R}$ , 亦即  $\mathfrak{R} = \{e\}$ , 則  $\mathfrak{R}$  叫做(关于  $A$  的)循环空間, 而  $A$  叫做循环(有时叫做非貶抑)綫性变换. 我們知道, 此时  $\mu(\lambda) = \mu_e(\lambda)$ , 并且这个事实指出: 一个循环空間的任意两个生成元素的指導多項式都相同. 它还指出: 循环綫性变换的最低多項式的次數为  $n$ ; 这因为, 如果  $\mathfrak{R} = \{e\}$ , 則  $\deg \mu_e(\lambda) = \dim \mathfrak{R} = n$ . 所以,  $\deg \mu(\lambda) = n$ .

反过来, 設  $A$  是任意綫性变换, 它的最低多項式的次數是  $n$ , 則由定理 1 知, 有一个向量  $e$  存在使  $\mu_e(\lambda) = \mu(\lambda)$ . 于是,  $\deg \mu_e(\lambda) = n$ , 而  $\dim \{e\} = n$ . 当然这就是說  $\{e\} = \mathfrak{R}$ . 故得下面的判断准則:

**定理 2.** 一个綫性变换是循环的必須而且只須它的最低多項式的次數是  $n$ .

今設  $\mathfrak{R} = \{e\}$ , 并且令

$$\mu(\lambda) = \mu_e(\lambda) = \lambda^n - \mu_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - \mu_0.$$

我們知道, 向量  $(e, eA, \cdots, eA^{n-1})$  构成一个基. 因为

$$\begin{aligned} eA &= eA \\ (eA)A &= eA^2 \\ &\dots\dots\dots \\ (eA^{n-2})A &= eA^{n-1} \\ (eA^{n-1})A &= \mu_0 e + \mu_1 (eA) + \dots + \mu_{n-1} (eA^{n-1}), \end{aligned}$$

故  $A$  关于这个基的随是

$$(8) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ (\mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n-2} & \mu_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

如果  $\mu(\lambda) = \lambda^n - \mu_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - \mu_0$  是任意多項式, 則(8)給出的  $n \times n$  陣叫做  $\mu(\lambda)$  的友陣. 照現在情形, 如果  $A$  是循環的, 它的最低多項式是  $\mu(\lambda)$ , 則(8)叫做  $A$  的約當典型陣. 顯然, 最低多項式可由陣讀出.

今来导出显示  $\mu(\lambda)$  的素因子的羣的典型陣, 我們先証

**定理 3.** 令  $\mathfrak{R} = \{e\}$ , 并且  $\mu(\lambda) = \mu_1(\lambda) \cdots \mu_s(\lambda)$ , 这里  $\mu_i(\lambda)$  是两两互素的, 则  $\mathfrak{R} = \{e_1\} \oplus \{e_2\} \oplus \cdots \oplus \{e_s\}$ , 这里  $\mu_{e_i}(\lambda) = \mu_i(\lambda)$ .

令  $v_i(\lambda) = \mu(\lambda)(\mu_i(\lambda))^{-1}$ , 并且令  $e_i = ev_i(A)$ , 则  $\mu_{e_i}(\lambda) = \mu_i(\lambda)$ . 我們还知道,  $e' = e_1 + e_2 + \cdots + e_r$  的指导多项式是  $\mu(\lambda)$ . 所以,  $\{e'\} = \mathfrak{R}$ . 另一方面,  $\{e'\} \subseteq \{e_1\} + \{e_2\} + \cdots + \{e_r\}$ , 故  $\mathfrak{R} = \{e_1\} + \{e_2\} + \cdots + \{e_r\}$ . 因为  $\dim \mathfrak{R} = \deg \mu(\lambda) = \sum \deg \mu_i(\lambda) = \sum \dim \{e_i\}$ , 故子空间  $\{e_i\}$  是无关的. 于是,  $\mathfrak{R} = \{e_1\} \oplus \{e_2\} \oplus \cdots \oplus \{e_r\}$ .

今令  $\mu(\lambda) = \pi_1(\lambda)^{k_1} \pi_2(\lambda)^{k_2} \cdots \pi_r(\lambda)^{k_r}$ , 这里  $\pi_i$  是不同的素因子, 则由定理 3 得  $\mathfrak{R} = \{e_1\} \oplus \{e_2\} \oplus \cdots \oplus \{e_r\}$ , 这里  $\mu_{e_i}(\lambda) = \pi_i(\lambda)^{k_i}$ .

为使記法上簡單起見,暂时假定  $s = 1$ , 于是,  $\mu(\lambda) = \pi(\lambda)^t$ ,



这里  $\pi(\lambda)$  是素因子, 并且如果

$$\pi(\lambda) = \lambda^q - \rho_{q-1}\lambda^{q-1} - \dots - \rho_0.$$

則  $n = \deg \mu(\lambda) = kq$ . 引入向量

$$\begin{aligned} f_1 &= e\pi(A)^{k-1}, \quad f_2 = e\pi(A)^{k-1}A, \quad \dots, \quad f_q = e\pi(A)^{k-1}A^{q-1}; \\ f_{q+1} &= e\pi(A)^{k-2}, \quad f_{q+2} = e\pi(A)^{k-2}A, \quad \dots, \quad f_{2q} = e\pi(A)^{k-2}A^{q-1}; \\ &\dots\dots\dots \\ f_{(k-1)q+1} &= e, \quad f_{(k-1)q+2} = eA, \quad \dots, \quad f_n = eA^{n-1}. \end{aligned}$$

于是,每个  $f$  的形状是  $e\phi(A)$ , 这里  $\deg \phi(\lambda) < kq$ . 再则与不同  $f$  连带的  $\phi(\lambda)$  的次数都不相同. 如果  $\sum \delta_i f_i = 0$ , 而  $\delta_i$  不全为零, 则必然存在次数  $< kq$  的多项式  $v(\lambda) \neq 0$ , 而使  $ev(A) = 0$ , 这与  $\deg \mu_e(\lambda) = \deg \mu(\lambda) = kq$  的事实矛盾; 因此各个  $f$  是线性无关的. 因为一共有  $kq$  个  $f$ , 故  $(f_1, f_2, \dots, f_{kq})$  是  $\Phi$  上  $\mathfrak{M}$  的一个基.

$A$  关于  $(f_1, f_2, \dots, f_k)$  的陣是什么呢? 我們有下面的关系:

$$\begin{aligned}
f_1 A &= f_2 \\
f_2 A &= f_3 \\
&\dots\dots\dots \\
f_{q-1} A &= f_q \\
f_q A &= e\pi(A)^{k-1} A^q = e\pi(A)^{k-1} [A^q - \pi(A)] \\
&= e\pi(A)^{k-1} [\rho_0 1 + \rho_1 A + \dots + \rho_{q-1} A^{q-1}] \\
&= \rho_0 f_1 + \rho_1 f_2 + \dots + \rho_{q-1} f_q, \\
f_{q+1} A &= f_{q+2} \\
f_{q+2} A &= f_{q+3} \\
&\dots\dots\dots \\
f_{2q-1} A &= f_{2q} \\
f_{2q} A &= e\pi(A)^{k-2} A^q = e\pi(A)^{k-2} [A^q - \pi(A)] + e\pi(A)^{k-1} \\
&= \rho_0 f_{q+1} + \rho_1 f_{q+2} + \dots + \rho_{q-1} f_{2q} + f_1 \\
&\dots\dots\dots \\
f_{(k-1)q+1} A &= f_{(k-1)q+2} \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

$$f_{(k-1)q+q-1}A = f_{kq}$$

$$f_{kq}A = \rho_0 f_{(k-1)q+1} + \rho_1 f_{(k-1)q+2} + \cdots + \rho_{q-1} f_{kq} + f_{(k-2)q+1}.$$

故  $A$  关于基  $(f_1, f_2, \cdots, f_{kq})$  的陣的形状为

$$(9) \qquad B = \begin{pmatrix} P & & & \\ & N & P & \\ & & N & \\ & & & \ddots \\ & & & & N & P \end{pmatrix},$$

这里  $P$  是  $\pi(\lambda)$  的友陣, 而  $N$  是  $q \times q$  陣

$$(10) \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

今回到一般情形,  $\mu(\lambda) = \pi_1(\lambda)^{k_1} \pi_2(\lambda)^{k_2} \cdots \pi_s(\lambda)^{k_s}$  及  $\mathfrak{R} = \{e_1\} \oplus \{e_2\} \oplus \cdots \oplus \{e_s\}$ . 我們在每个  $\{e_i\}$  里选取上面所指出的形状的基. 这些基合併起来就給出  $\mathfrak{R}$  的一个基.  $A$  关于这个基的陣是

$$(11) \qquad \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_s \end{bmatrix},$$

这里每个  $B_i$  是由  $\pi_i(\lambda)^{k_i}$  决定的, 都与  $B$  由  $\pi(\lambda)^k$  决定的方法一样.

(11)叫做循环綫性变换  $A$  的古典典型陣. 出現于最低多項式的因子分解里的素因子的幂  $\pi_i(\lambda)^{k_i}$  叫做循环綫性变换的初等因子. 初等因子  $\pi_i(\lambda)^{k_i}$  連帶于古典典型陣里的陣块  $B_i$ . 例如, 令  $\Phi$  是有理数域, 并令  $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 - 2)^2$ , 則最低多項式为  $\mu(\lambda)$  的循环綫性变换的古典典型陣是

$$\left( \begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

### 習 題 23

1. 証明: 如果  $\mu(\lambda)$  是任意多項式, 它的首項系数是 1, 則有一个陣  $(\alpha)$  存在, 有  $\mu(\lambda)$  作为它的最低多項式.

2. 証明: 如果  $A$  是一个綫性变换, 它有对角陣

$$\text{diag} \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \},$$

这里  $\alpha_i$  全不相同, 則  $A$  的最低多項式是  $\Pi(\lambda - \alpha_i)$ . 于是, 証明  $A$  是循环綫性变换.

3. 使用前題証明: 如果  $C$  是复数域, 而  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  是 1 的不同的  $n$  次根, 則

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & & & & \\ & \xi_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \xi_n \end{bmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在  $C_n$  里是相似陣.

4. 証明: 如果  $A$  是一个綫性变换, 它的陣是

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1, n-1} & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2, n-1} & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

則  $A$  是循环的. 使用这个結果証明給定的陣相似于陣

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. 如果循环綫性变换的最低多項式是  $(\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1)^3(\lambda + 1)^2$ , 并假定  $\Phi$  是实数域, 則这个变换的古典典型陣是什么?

6. 証明: 如果  $\mathfrak{N} = \{e_1\} \oplus \{e_2\} \oplus \dots \oplus \{e_s\}$ , 而指导多項式  $\mu_{e_i}(\lambda)$  是两两互素的, 則  $\mathfrak{N}$  是循环空間.

5. 由綫性變換決定的  $\Phi[\lambda]$ -模 為着進一步研討綫性變換. 我們要用到另一個觀念, 即使用  $\Phi[\lambda]$  與環  $\mathfrak{A} = [1, A, A^2, \dots]$  之間的同態把向量空間  $\mathfrak{A}$  轉化為一個  $\Phi[\lambda]$ -模. 為達到這個目的, 定義積  $\phi(\lambda)x (x \in \mathfrak{A})$  為向量  $x\phi(A)$ . 於是,

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)(x+y) &= (x+y)\phi(A) = x\phi(A) + y\phi(A) \\ &= \phi(\lambda)x + \phi(\lambda)y.\end{aligned}$$

又因為與  $\phi(\lambda) + \psi(\lambda)$  及  $\phi(\lambda)\psi(\lambda)$  對應的綫性變換各是  $\phi(A) + \psi(A)$  及  $\phi(A)\psi(A) = \phi(A)\phi(A)$ , 故

$$\begin{aligned}[\phi(\lambda) + \psi(\lambda)]x &= x[\phi(A) + \psi(A)] \\ &= x\phi(A) + x\psi(A) = \phi(\lambda)x + \psi(\lambda)x, \\ [\phi(\lambda)\psi(\lambda)]x &= x[\phi(A)\psi(A)] \\ &= (x\phi(A))\psi(A) = \phi(\lambda)(\psi(\lambda)x), \\ 1x &= x1 = x.\end{aligned}$$

故適合基礎模條件<sup>1)</sup>. 採用模的觀點有若干好處. 第一, 我們以環  $\Phi[\lambda]$  代替環  $\mathfrak{A}$ . 環  $\mathfrak{A}$  可能有很複雜的代數結構; 它可含有無勢元素, 並且可以有零因子; 但我們知道多項式環  $\Phi[\lambda]$  是一個整區, 並且有可以利用的這個環的算術理論. 關於  $\Phi[\lambda]$  的基本算術性質是: 這個環里的每個理想是一個主理想.

採用模的觀點的第二個好處是引導我們去考慮比  $\mathfrak{A}$  有更簡單的結構並且可用以研究  $\mathfrak{A}$  的其它  $\Phi[\lambda]$ -模. 事實上, 我們要把  $\mathfrak{A}$  的研究化為自由模與自由模的子模的研究. 這是按下面方法進行的: 令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\Phi$  上  $\mathfrak{A}$  的一個基. 自然  $e_i$  成為  $\mathfrak{A}$  關於  $\Phi[\lambda]$  的生成元素的一個集合. 因為對於任意  $e \in \mathfrak{A}$  有使  $\mu_e(\lambda)e = e\mu_e(A) = 0$  的非零多項式  $\mu_e(\lambda)$  存在, 故  $\Phi[\lambda]$ -模  $\mathfrak{A}$  不是自由模. 故有如  $\sum_1^n \gamma_i(\lambda)e_i = 0$  形狀的若干關係存在, 這裡  $\gamma_i(\lambda)$  不全為 0. 要研究這些關係, 很自然地引入自由  $\Phi[\lambda]$ -模

1) 應該指出,  $\mathfrak{A}$  里乘法的交換性是用于驗證第三公理的. 我們也可把  $\mathfrak{A}$  看作右  $\Phi[\lambda]$ -模. 此時  $x\phi(\lambda) = x\phi(A)$ . 這大約是最自然的看法, 但我們採用上面方法是為着與前此對於左模的強調相近應.

子模  $\mathfrak{M}$  是容易决定的。令  $e_i A = \sum a_{ij} e_j$ , 则  $(a)$  是  $A$  关于给定基的阵。显然, 元素

都属于  $\mathfrak{N}$ . 今将证明:  $\mathfrak{N}$  是自由模, 而  $v_i$  成为这个模的一个基. 由规定  $v_i = \lambda t_i - \sum \alpha_{ij} t_j$  得  $\lambda t_i = v_i + \sum \alpha_{ij} t_j$ . 用这些关系可使元素  $v = \sum \phi_i(\lambda) t_i$  表达为  $\sum \psi_i(\lambda) v_i + \sum \rho_i t_i$  的形状, 这里  $\rho_i \in \Phi$ . 显然, 如果  $v \in \mathfrak{N}$ , 则  $\sum \rho_i t_i \in \mathfrak{N}$ . 于是,  $\sum \rho_i e_i = (\sum \rho_i t_i) T = 0$ . 但  $e_i$  是  $\Phi$ -无关的, 由此推知每个  $\rho_i = 0$ . 故  $v = \sum \psi_i(\lambda) v_i$ , 这证明  $v_i$  是  $\mathfrak{N}$  的生成元素. 次设  $\sum \psi_i(\lambda) v_i = 0$ , 则

$\mathbb{A}$

如果有某  $\psi_i \neq 0$ , 令  $\phi_r$  是一个有最大次数的, 则关系  $\phi_r(\lambda)\lambda = \sum_i \phi_i(\lambda)\alpha_{ir}$  显然是不可能. 这证明  $\lambda_i$  成为  $\mathfrak{A}$  的一个基.

1) 我們要討論的許多事情也可對於  $\sigma$ -模來做，這裡  $\sigma$  是非交換主理想整區。這個理論可應用於除環上一個向量空間里的單線性變換論。參看著者的環論 (Theory of Rings, 1943 年出版于紐約) 的第三卷。

普通有限生成的交換羣理論：我們在第一章里講過，這個理論可由把交換羣看作  $\sigma$ -模而得，這裡  $\sigma$  是有理整數環。

故令  $\mathfrak{N}$  是任意有限生成的  $\sigma$ -模，並且令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是生成元素的集合。依上面用過的方法我們引入自由模  $\mathfrak{F}$  以  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  為基，及映照  $T: \sum \phi_i t_i \rightarrow \sum \phi_i e_i$ 。映照  $T$  是一個  $\sigma$ -同態；故核  $\mathfrak{N}$  是  $\mathfrak{F}$  的一個子模。今將證明：自由  $\sigma$ -模的任意子模是自由模，這裡  $\sigma$  是主理想整區。我們規定模  $0$  是帶有一個空基的一個自由模，這樣在使用時感到方便。

今令  $\mathfrak{N}$  是帶有基  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  的自由模  $\mathfrak{F}$  的任意子模。我們將對於  $n$  施歸納法，證明： $\mathfrak{N}$  是自由模，且有  $m \leq n$  個元素的一個基。如果  $n = 0$ ，這定理是顯然成立的。於是，設它對於有  $n-1$  個元素為基的模  $\mathfrak{F}'$  成立，而考慮使  $\beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \dots + \beta_n t_n \in \mathfrak{N}$  的  $\sigma$  里元素  $\beta_1$  的全体  $\mathfrak{S}$ 。易知  $\mathfrak{S}$  是一個理想；故  $\mathfrak{S} = (\delta_1)$ 。如果  $\delta_1 = 0$ ，則  $\mathfrak{N}$  的每個元素的形狀如  $\beta_2 t_2 + \dots + \beta_n t_n$ ，因此屬於帶有基  $(t_2, t_3, \dots, t_n)$  的自由模  $\mathfrak{F}'$  里。此時結果也顯然成立。故設  $\delta_1 \neq 0$ ，並令  $v_1 = \delta_1 t_1 + \sum_{i=2}^n \beta'_i t_i$  是  $\mathfrak{N}$  的一個元素有“首項係數”  $\delta_1$ 。於是，如果  $v$  是  $\mathfrak{N}$  的任意元素，則  $v = \sum \beta_i t_i$  而  $\beta_1 = \mu_1 \delta_1$ 。所以， $v' = v - \mu_1 v_1 \in \mathfrak{F}'$ 。這個元素當然也屬於  $\mathfrak{N}$ 。因為交  $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}'$  是  $\mathfrak{F}'$  的一個子模，故可設它是帶有基  $v_2, v_3, \dots, v_m$  ( $m \leq n$ ) 的一個自由模。於是， $v' = \sum_{k=2}^m \mu_k v_k$  而  $v = \mu_1 v_1 + \sum_{k=2}^m \mu_k v_k$ 。

故  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  是  $\mathfrak{N}$  的生成元素的一個集合。次設  $\sum_{i=1}^m \rho_i v_i = 0$ ；如果以  $\delta_1 t_1 + \sum \beta'_i t_i$  代替  $v_1$ ，而其它的  $v$  用  $t_2, t_3, \dots, t_n$  的表達式來代替，則得

$$\rho_1 \delta_1 t_1 + \rho'_2 t_2 + \dots + \rho'_m t_m = 0.$$

因為  $\delta_1 \neq 0$ ，由此可推得  $\rho_1 = 0$ 。於是，得  $\sum_{k=2}^m \rho_k v_k = 0$ ；因為  $(v_2, v_3, \dots, v_m)$  構成  $\mathfrak{N}'$  的一個基，故由這個等式知所有  $\rho$  都等於 0。這就完成了下面定理的證明：

**定理 4.** 如果  $\mathfrak{F}$  是帶有  $n$  个元素的基的一个自由  $\mathfrak{o}$ -模, 而  $\mathfrak{o}$  是一个主理想整區, 則  $\mathfrak{F}$  的任意子模是自由模, 且含有  $m \leq n$  个元素的一个基.

**7.  $\mathfrak{F}$  及  $\mathfrak{M}$  的生成元素的正規化** 今設元素  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  是自由  $\mathfrak{o}$ -模  $\mathfrak{F}$  的子模  $\mathfrak{M}$  的生成元素, 而  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  是  $\mathfrak{F}$  的一个基. 令

$$\begin{aligned} v_1 &= \sigma_{11}t_1 + \sigma_{12}t_2 + \dots + \sigma_{1n}t_n, \\ v_2 &= \sigma_{21}t_1 + \sigma_{22}t_2 + \dots + \sigma_{2n}t_n, \\ &\dots\dots\dots \\ v_m &= \sigma_{m1}t_1 + \sigma_{m2}t_2 + \dots + \sigma_{mn}t_n. \end{aligned} \quad (13)$$

則陣  $(\sigma)$  (元素  $\sigma_{ij} \in \mathfrak{o}$ ) 由有序集合  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  及  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  唯一决定.

令  $(\mu_{ij})$  是陣环里一个单位, 并令  $(\mu_{ij}^*)$  是它的逆陣. 定义  $t'_i = \sum \mu_{ij}t_j$ , 則可断言  $t'_i$  构成  $\mathfrak{F}$  的另一个基. 这因为, 首先有关系

$$\sum \mu_{ki}^* t'_i = \sum_{i,j} \mu_{ki}^* \mu_{ij} t_j = \sum \delta_{kj} t_j = t_k.$$

所以, 任意元素  $\sum \phi_i t_i$  可写成形状  $\sum \phi_i t'_i$ , 而  $t'_i$  是生成元素. 次設  $\sum \gamma_i t'_i = 0$ , 則  $\sum_{i,j} \gamma_i \mu_{ij} t_j = 0$ . 于是,  $\sum_i \gamma_i \mu_{ij} = 0$ . 但这可推出

$$\gamma_k = \sum_{i,j} \gamma_i \mu_{ij} \mu_{jk}^* = 0,$$

这就証明了  $t'_i$  构成一个基.

仿此可知, 如果  $(v_{pq})$  是  $\mathfrak{o}_m$  里一个单位, 則元素  $v'_p = \sum v_{pq} v_q$  組成  $\mathfrak{M}$  的生成元素的另一个集合.

今設以  $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$  代替基  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , 这里  $t'_i = \sum \mu_{ij} t_j$ , 而  $(\mu)$  是一个单位陣, 又設以  $(v'_1, v'_2, \dots, v'_m)$  代替  $\mathfrak{M}$  的生成元素  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ , 这里  $v'_p = \sum v_{pq} v_q$ . 則  $(v'_1, v'_2, \dots, v'_m)$  关于  $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$  的陣是什么呢? 我們有关系

$$v'_p = \sum_q v_{pq} v_q = \sum_{q,i} v_{pq} \sigma_{qi} t_i = \sum_{q,i,j} v_{pq} \sigma_{qi} \mu_{ij}^* t'_j = \sum \tau_{pj} t'_j,$$

这里  $\tau_{pj} = \sum_{q,i} v_{pq} \sigma_{qi} \mu_{ij}^{-1}$ , 故新陣与  $(\sigma)$  的关系是

$$(14) \quad (\tau) = (v)(\sigma)(\mu)^{-1}.$$

因此問題归到“正确”选择单位陣  $(v)$  及  $(\mu)^{-1}$  使陣  $(\tau)$  具有简单的“典型”形状.

**8. 元素属于主理想整区的陣的等价** 令  $(\sigma)$  及  $(\tau)$  是元素属于主理想整区  $\mathfrak{o}$  的两个  $m \times n$  陣. 如果有一个单位  $(\mu) \in \mathfrak{o}_n$  及一个单位  $(v) \in \mathfrak{o}_m$  存在使

$$(\tau) = (v)(\sigma)(\mu),$$

則說  $(\sigma)$  及  $(\tau)$  是等价的. 这种关系是等价关系. 在  $\mathfrak{o}$  是一个域的特殊情形前此已考虑了. 在那里我們知道,  $(\sigma)$  与  $(\tau)$  是等价的充要条件是它們有相同的行列式秩. 对于任意主理想整区这个一般情形, 这个結果的推論是: 等价的必要条件是秩相等. 这因为, 令  $(\tau) = (v)(\sigma)(\mu)$ , 这里  $(\mu)$  及  $(v)$  是单位. 于是, 如果  $P$  是  $\mathfrak{o}$  的商域, 則給定的方程可看作元素在  $P$  里的陣之間的关系. 显然  $(\mu) \in L(P, n)$  而  $(v) \in L(P, m)$ . 故由域情形中所得結果知,  $(\tau)$  与  $(\sigma)$  有相同的行列式秩.

今討論在与一个給定的  $m \times n$  陣  $(\sigma)$  等价的陣中选取具有特別简单形状的陣的問題. 我們要得的結果是

**定理 5.** 如果  $(\sigma)$  是元素属于一个主理想整区  $\mathfrak{o}$  的  $m \times n$  陣, 則存在有与  $(\sigma)$  等价的一个“对角”陣<sup>1)</sup>

$$\text{diag} \{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r, 0, \dots, 0 \},$$

这里  $\delta_i \neq 0$ , 而在  $i < j$  时  $\delta_i | \delta_j$  (亦即  $\delta_i$  是  $\delta_j$  的一个因子).

(a) 我們先給这个定理以一个构造性的証明, 这証明在  $\mathfrak{o}$  是欧几里得整区的情形有效. 如果对于一个可交換整区里每个元素  $a$  能定义一个度数  $\delta(a)$ , 它是非負整数, 并且

1.  $\delta(a) = 0$  必須而且只須  $a = 0$ ;
2.  $\delta(ab) = \delta(a) + \delta(b)$ ;
3. 如果  $a$  是任意元素而  $b \neq 0$ , 則有元素  $q$  及  $r$  存在,  $\delta(r) <$

1) 参看第二章, §6 的(18).



$\delta(b)$ , 使  $a = bq + r$ .

则这个整区叫做欧几里得整区, 关于欧几里得整区里任意理想是主理想的证明已见于本书第一卷的第四章 §5 里, 不再赘述. 今来证本定理.

首先我們要講到下列三种方陣都是单位陣:

$$T_{ij}(\beta) = \begin{pmatrix} & & & j \\ & 1 & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & 1 & \cdot \cdot \cdot \beta \cdot \cdot \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ & & & & & & & i \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, (i \neq j)$$

$$D_i(\gamma) = \begin{pmatrix} & & & i \\ & 1 & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & 1 & \cdot \\ & & & \gamma & \cdot \cdot \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & i \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad i (\gamma \text{ 是 } v \text{ 里一个单位})$$

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} & & & i & & & j \\ & 1 & & \cdot & & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ & & & 1 & & & \cdot \\ & & & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \cdot \cdot \\ & & & & \cdot & 1 & & & \cdot & i \\ & & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ & & & & \cdot & & 1 & \cdot & & \\ & & & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \cdot \cdot \\ & & & & & & & & 1 & j \\ & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (i \neq j)$$

这因为,  $T_{ij}(\beta)^{-1} = T_{ij}(-\beta)$ ,  $D_i(\gamma)^{-1} = D_i(\gamma^{-1})$  及  $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$ . 我們容易验证:

I. 以  $m \times m$  陣  $T_{ij}(\beta)$  左乘  $(\sigma)$  得一个陣, 它的第  $i$  行是  $\beta$  倍  $(\sigma)$  的第  $j$  行与  $(\sigma)$  的第  $i$  行之和, 而它的其它各行与  $(\sigma)$  相同.

以  $n \times n$  陣  $T_{ij}(\beta)$  右乘  $(\sigma)$  得一个陣, 它的第  $j$  列是  $\beta$  倍

$(\sigma)$  的第  $i$  列与  $(\sigma)$  的第  $l$  列之和, 而它的其它各列与  $(\sigma)$  相同。

II. 以  $m \times m$  陣  $D_i(\gamma)$  左乘  $(\sigma)$  等于作出以  $\gamma$  乘  $(\sigma)$  的第  $i$  行的运算, 而保留其它各行不变,

以  $n \times n$  陣  $D_i(\gamma)$  右乘  $(\sigma)$  等于作出以  $\gamma$  乘  $(\sigma)$  的第  $i$  列的运算, 而保留其它各列不变,

III. 以  $m \times m$  陣  $P_{ij}$  左乘  $(\sigma)$  等于把  $(\sigma)$  的第  $i$  行与第  $j$  行对調, 而保留其它各行不变,

以  $n \times n$  陣  $P_{ij}$  右乘  $(\sigma)$  等于把  $(\sigma)$  的第  $i$  列与第  $j$  列对調, 而保留其它各列不变,

陣  $T_{ij}, D_i, P_{ij}$  叫做初等陣, 而用这些陣作乘法順序叫做第 I, II 及 III 型的初等变换。由  $(\sigma)$  經過有限次初等变换而得的陣与  $(\sigma)$  是等价的。現在叙述証明的主要部分。

如果  $(\sigma) = 0$  就无須証明了。否則令  $\sigma_{11}$  是  $(\sigma)$  里最低度数的非零元素。由第 III 型初等变换可把这个元素移到  $(1, 1)$ -位置。如果  $\sigma_{1k} = \sigma_{11}\beta_k + \rho_{1k}$ , 这里度数  $\delta(\rho_{1k}) < \delta(\sigma_{11})$ , 則可使用第 I 型初等变换以  $\rho_{1k}$  来代替  $\sigma_{1k}$ 。如果  $\rho_{1k} \neq 0$ , 則得与  $(\sigma)$  等价的一个新陣, 在这个陣里存在有非零元素, 它的度数比  $(\sigma)$  里最小非零的度数还小。然后再对这个新陣重复使用上面的方法。仿此, 如果  $\sigma_{k1} = \sigma_{11}\beta'_k + \rho_{k1}$ , 这里  $\delta(\rho_{k1}) < \delta(\sigma_{11})$ , 則或是  $\rho_{k1} = 0$ , 或是能得出与  $(\sigma)$  等价的陣, 它有一个非零元素, 度数比最小的  $\delta(\sigma_{11}) \neq 0$  还小。因为非零的最小度数是保持縮小, 故最后到达一个陣, 使  $\sigma_{1k} = \sigma_{11}\beta_k, \sigma_{k1} = \sigma_{11}\beta'_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 。于是, 由第 I 型初等变换給出下面形状的一个等价陣:

$$(15) \quad \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \rho_{m2} & \cdots & \rho_{mn} \end{bmatrix}, \quad \rho_{11} = \sigma_{11}.$$

今把这个方法使用于子陣  $(\rho_{ij}) (i = 2, \dots, m; j = 2, \dots, n)$ 。此时需要作的变换并不影响到第一行或第一列, 而可得出下面形状的等价陣

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} & \cdots & \tau_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \tau_{m3} & \cdots & \tau_{mn} \end{bmatrix}.$$

这样继续下去,最后得出对角形状的一个等价阵,譬如为  $\text{diag} \{ \epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_r, 0, \cdots, 0 \}$ , 这里  $\epsilon_i \neq 0$ .

如果  $\epsilon_i = \epsilon_1 \beta + \rho_i$ ,  $\delta(\rho_i) < \delta(\epsilon_1)$  并且  $\rho_i \neq 0$ , 则可以等价阵

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & \cdots & \epsilon_i & \cdots \\ & \ddots & \vdots & \\ & & \epsilon_i & \\ & & & \epsilon_{i+1} \end{bmatrix}$$

代替前面的对角阵; 这个阵与  $(1, i)$ -位置上的元素是  $\rho_i$  的阵等价. 我们再重复上面的方法把这个新阵“对角阵化”, 而得另一个新阵  $\text{diag} \{ \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r, 0, \cdots, 0 \}$ , 此时  $\delta(\eta_1) < \delta(\epsilon_1)$ . 这个方法重复使用若干次后, 最终达到一个等价的对角阵  $\text{diag} \{ \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r, 0, \cdots, 0 \}$ , 这里非零元素  $\delta_i$  适合所需要的可除性条件.

(b) 在一般情形的论证与此相似. 不过我们使用元素的长度来代替上面的度数. 一个元素分解为素因子  $\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_r$  时, 素因子的个数叫做这个元素的长度. 由于  $\mathfrak{o}$  里唯一分解因子定理<sup>1)</sup>的成立, 所以因子个数是不变数. 设  $\sigma_{11}$  在非零元素中有最小长度, 并设  $\sigma_{11} \nmid \sigma_{1k}$ <sup>2)</sup>. 记  $\alpha = \sigma_{11}$ ,  $\beta = \sigma_{1k}$ , 并且令  $\delta$  是  $\alpha$  与  $\beta$  的一个最高公因子, 则有元素  $\xi, \eta$  存在使  $\alpha\xi + \beta\eta = \delta$ . 令  $\zeta = \beta\delta^{-1}$ ,  $\theta = -\alpha\delta^{-1}$ , 则有阵关系式

$$\begin{bmatrix} -\theta & \zeta \\ \eta & -\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi & \zeta \\ \eta & \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

故这些阵是单位阵. 于是,

1) 参看本书第一卷, 第四章 §4.

2)  $a \nmid b$  的意思为:  $a$  不是  $b$  的一个因子.

$$U = \begin{pmatrix} \xi & 0 & \cdots & 0 & \zeta & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 1 & & & \\ \eta & 0 & \cdots & 0 & \theta & \cdot & \cdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & & \cdot & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad k$$

是一个单位阵。阵  $(\sigma)U$  以向量  $(\delta, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \cdots, \sigma_{1(k-1)}, 0, \sigma_{1(k+1)}, \cdots, \sigma_{1n})$  做它的第一行。因为  $\alpha \neq \beta$ , 故  $\delta$  的长度小于  $\alpha = \sigma_{11}$  的长度。这个方法及施于第一列上的类似方法最后引出与  $(\sigma)$  等价的一个阵, 在这个阵里  $\sigma_{11}$  是每个  $\sigma_{1k}$  及每个  $\sigma_{k1}$  的一个因子, 这样就达到形状如(15)的一个阵。余下的论证是重复上面的论证, 就不多赘了。

与  $(\sigma)$  等价而又具有定理 5 给出的形状的阵叫做阵  $(\sigma)$  的范式。范式的对角元素叫做  $(\sigma)$  的不变因子。我们将在 § 10 里证明: 不变因子事实上是给定的阵的不变量。

## 习 题 24

1. 求下面的阵的范式:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \end{bmatrix},$$

此时  $\mathfrak{o}$  取整数环  $I$ 。

2. 求下面的阵的范式:

$$(\sigma) = \begin{bmatrix} \lambda-17 & 8 & 12 & -14 \\ -46 & \lambda+22 & 35 & -41 \\ 2 & -1 & \lambda-4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & \lambda-3 \end{bmatrix},$$

此时  $\mathfrak{o} = R_0[\lambda]$ , 而  $R_0$  是有理数域; 并求单位阵  $(\mu)$  及  $(\nu)$  使  $(\nu)(\sigma)(\mu)$  为范式。

3. 证明: 一个对角方阵  $\text{diag}\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$  是一个单位阵必须而且只须每个  $\delta_i$  是一个单位。

4. 应用第 3 题证明: 如果  $\mathfrak{o}$  是欧几里得整区, 则  $\mathfrak{o}_n$  里任意单位阵是初等阵的积。

5. 証明: 如果  $d$  是元素  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的最大公因子, 則  $\mathfrak{o}_n$  里有一个单位陣存在使  $(a_1, \dots, a_n)(\mu) = (d, 0, \dots, 0)$ .

6. 証明: 如果元素  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$  是互素的 (亦即最大公因子等于 1), 則有元素  $a_{ij} (i=2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n)$  存在使  $(a)$  是一个单位陣.

**9. 有限生成的  $\mathfrak{o}$ -模的结构** 要叙述结构定理須引入关于  $\mathfrak{o}$ -模的某些一般概念; 其中有些概念已在由綫性变换决定的模的特殊情形里遇到.

令  $x$  是  $\mathfrak{o}$ -模  $\mathfrak{R}$  的任意元素, 則使  $\beta x = 0$  的元素  $\beta \in \mathfrak{o}$  的集合  $\mathfrak{S}_x$  是一个理想. 这个理想叫做元素  $x$  的阶理想. 如果  $\mathfrak{o}$  是一个主理想整区, 則  $\mathfrak{S}_x = (\mu_x)$ . 再則, 如果  $\mathfrak{o} = \Phi[\lambda]$  及  $\mathfrak{S}_x \neq (0)$ , 則可把  $\mu_x$  正規格化使首項系数为 1. 这样得出的  $\mu_x$  是上面讲过的指导多项式.

$\mathfrak{R}$  里固定元素  $x$  的倍数  $\alpha x$  的全体  $\{x\}$  是一个子模. 我們叫  $\{x\}$  做由  $x$  生成的循环子模; 并且如果  $\mathfrak{R}$  里存在有一个  $e$  使  $\mathfrak{R} = \{e\}$ , 則  $\mathfrak{R}$  叫做循环模. 如果  $\mathfrak{S}_x = (0)$ , 則子模  $\{x\}$  是一个自由模. 在相反情形, 如果  $\mathfrak{S}_x \neq (0)$ , 則說  $x$  是有有限阶.

如果  $y = \alpha x$ , 并且  $\beta \in \mathfrak{S}_x$ , 則  $\beta y = \beta \alpha x = \alpha \beta x = 0$ . 所以  $\beta \in \mathfrak{S}_y$ , 从而  $\mathfrak{S}_x \subseteq \mathfrak{S}_y$ . 如果  $y$  是  $\{x\}$  的另一个生成元素, 則也有  $\mathfrak{S}_y \subseteq \mathfrak{S}_x$ . 于是,  $\mathfrak{S}_x = \mathfrak{S}_y$ . 故阶理想只与循环子模有关, 而与这个子模的特殊生成元素无关.

如果  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_s$  是模  $\mathfrak{R}$  的子模, 而

$$(16) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots + \mathfrak{R}_s$$

的意义是:  $\mathfrak{R}$  为含所有  $\mathfrak{R}_i$  的子模中的最小者; 并且若

$$(17) \quad \mathfrak{R}_i \cap (\mathfrak{R}_1 + \dots + \mathfrak{R}_{i-1} + \mathfrak{R}_{i+1} + \dots + \mathfrak{R}_s) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, s),$$

則說  $\mathfrak{R}$  是子模  $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_s$  的直接和. 如果这些条件成立, 則記作  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_s$ . 如同在向量空間的情形,  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_s$  必須而且只須  $\mathfrak{R}$  里每个  $x$  有一种而且只有一种方法写成  $x_1 + x_2 + \dots + x_s$  的形状, 这里  $x_i \in \mathfrak{R}_i$ .

令  $\mathfrak{o}$  是主理想整区, 則  $\mathfrak{o}$ -模的基本结构定理可述之如次:

**定理 6.** 如果  $\mathfrak{o}$  是一个主理想整区, 則任意有限生成的  $\mathfrak{o}$ -模

是循环子模的直接和.

証 令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的生成元素的集合. 与前此一样, 引入基为  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  的自由模  $\mathfrak{F}$ , 及  $\mathfrak{F}$  到  $\mathfrak{R}$  上的  $\sigma$ -同态  $T: \sum \phi_i t_i \rightarrow \sum \phi_i e_i$ . 令  $\mathfrak{N}$  是核, 则  $\mathfrak{N}$  有  $m \leq n$  个元素的一个基. 就当前目的来说, 我们只需要较弱的结果, 即  $\mathfrak{N}$  是有限生成的. 令  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  是生成元素的集合, 并且与前面一样令  $v_i = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} t_j$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 是联结  $v_i$  及  $t_j$  的关系. 今以  $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$  代替  $t_j$ , 并以  $(v'_1, v'_2, \dots, v'_m)$  代替  $v_i$ , 这里  $t'_i = \sum \mu_{ij} t_j$ ,  $v'_p = \sum v_{pq} v_q$  而且  $(\mu)$  及  $(v)$  都是单位, 则  $\mathfrak{N}$  的生成元素的新集合  $(v'_1, v'_2, \dots, v'_m)$  关于  $\mathfrak{F}$  的新基  $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$  的阵是  $(v)(\sigma)(\mu)^{-1}$ . 我们选择单位阵  $(\mu)$  及  $(v)$  使  $(v)(\sigma)(\mu)^{-1}$  有范式  $\text{diag} \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r, 0, \dots, 0\}$ . 于是, 联结新的生成元素的关系是

$$(18) \quad v'_1 = \delta_1 t'_1, v'_2 = \delta_2 t'_2, \dots, v'_r = \delta_r t'_r, v'_{r+1} = 0, \dots, v'_m = 0.$$

今定义  $e'_i = \sum \mu_{ij} e_j$ ; 因为  $(\mu)$  是一个单位阵, 故这些元素也是  $\mathfrak{R}$  的生成元素. 我们可以断定

$$(19) \quad \mathfrak{N} = \{e'_1\} \oplus \{e'_2\} \oplus \dots \oplus \{e'_n\},$$

并且  $\{e'_i\}$  的阶理想在  $i \leq r$  时是  $(\delta_i)$ , 而在  $i > r$  时是  $(0)$ . 这因为,  $e'_i$  是生成元素, 故 (16) 成立. 要证 (17) 成立, 必须证明: 如果

$\sum_{i=1}^n \beta_i e'_i = 0$ , 则每个  $\beta_i e'_i = 0$ . 因为  $t'_i = \sum \mu_{ij} t_j$ ,  $t'_i T = e'_i$ . 所以  $\sum \beta_i e'_i = 0$  可推得  $\sum \beta_i t'_i \in \mathfrak{N}$ . 因为  $v'_i$  是  $\mathfrak{N}$  的生成元素, 这说明  $\sum_{i=1}^n \beta_i t'_i = \sum_{i=1}^r \gamma_i v'_i$ . 所以,

$$\beta_1 t'_1 + \beta_2 t'_2 + \dots + \beta_n t'_n = \gamma_1 \delta_1 t'_1 + \gamma_2 \delta_2 t'_2 + \dots + \gamma_r \delta_r t'_r.$$

因为  $t'_i$  构成  $\mathfrak{F}$  的一个基, 由此就推得

$$i \leq r \text{ 时 } \beta_i = \gamma_i \delta_i, \text{ 而 } i > r \text{ 时 } \beta_i = 0.$$

故在  $i > r$  时必然地  $\beta_i e'_i = 0$ . 又因为  $v'_i \in \mathfrak{N}$ , 而  $i \leq r$  时  $v'_i = \delta_i t'_i$ , 故  $v'_i T = \delta_i e'_i = 0$ . 于是在  $i \leq r$  时也有  $\beta_i e'_i = \gamma_i \delta_i e'_i = 0$ . 这证明了我们的断定的前半, 也完成了定理 6 的证明.

我們還會指出,在  $i > r$  時  $\beta_i e'_i = 0$  推得  $\beta_i = 0$ . 故階理想  $\mathfrak{S}_i = (0)$ . 又我們已知,如果  $i \leq r$ , 則  $\beta_i e'_i = 0$  必須而且只須  $\beta_i$  是  $\delta_i$  的倍數. 故對於這些  $i$ ,  $\mathfrak{S}_i = (\delta_i)$ . 這証明了上面斷定的後半.

今就我們的結果給出另一個說明. 首先,我們看到:如果生成元素  $e'_i (i = r+1, \dots, n)$  有階理想  $= (0)$ , 則如  $\{e'_{r+1}\}, \{e'_{r+2}\}, \dots, \{e'_n\}$  的循環子模的直接和是一個自由模. 這因為, 如果  $\beta_{r+1}e'_{r+1} + \beta_{r+2}e'_{r+2} + \dots + \beta_n e'_n = 0$ , 則每個  $\beta_i e'_i = 0$ ; 又因為  $\mathfrak{S}_i = (0)$ , 故  $\beta_i = 0$ . 其次我們要說,  $\mathfrak{R}$  的有限階元素的子集合  $\mathfrak{S}$  是一個子模. 這因為, 如果  $y_1, y_2 \in \mathfrak{S}$  而  $\beta_i \neq 0$  時  $\beta_i y_i = 0$ , 則  $\beta_1 \beta_2 (y_1 - y_2) = 0$ , 並且  $\beta_1 \beta_2 \neq 0$ . 如果  $y \in \mathfrak{S}$ , 則對於任意  $\alpha$  還有  $\alpha y \in \mathfrak{S}$ . 今將証明:由所有綫性組合  $\alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \dots + \alpha_r e'_r$  構成的子模  $\bar{\mathfrak{S}} = \{e'_1\} \oplus \{e'_2\} \oplus \dots \oplus \{e'_r\}$  確是  $\mathfrak{R}$  里有限階元素的子模  $\mathfrak{S}$ . 因為  $e'_i \in \mathfrak{S} (i = 1, 2, \dots, r)$ , 故  $\bar{\mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{S}$ . 另一方面, 令  $y = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \dots + \alpha_n e'_n \in \mathfrak{S}$ , 則存在有一個  $\beta \neq 0$ , 使

$$\beta \alpha_1 e'_1 + \beta \alpha_2 e'_2 + \dots + \beta \alpha_n e'_n = 0.$$

我們已知,由此可推出  $j > r$  時  $\beta \alpha_j = 0$ . 故  $j > r$  時  $\alpha_j = 0$  而  $y \in \bar{\mathfrak{S}}$ . 於是,  $\mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{S}}$ . 但顯然  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \{e'_{r+1}\} \oplus \dots \oplus \{e'_n\} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{E}$  是自由模, 這裡  $\mathfrak{E} = \{e'_{r+1}\} \oplus \dots \oplus \{e'_n\}$ . 這証明了下面的定理.

**定理 7.** 如果  $\mathfrak{o}$  是一個主理想整區, 則任意有限生成的  $\mathfrak{o}$ -模是有限階元素的子模與一個自由模的直接和.

最後我們要說:在分解  $\mathfrak{R} = \{e'_1\} \oplus \{e'_2\} \oplus \dots \oplus \{e'_n\}$  里可摘去階理想是  $(\delta_i) = (1)$  的項  $\{e'_i\}$ . 如果有  $h$  個這樣的項, 則可記  $e'_{h+j} = f_j (j = 1, 2, \dots, t, \text{ 這裡 } t = n - h)$ . 我們還用  $u$  表示有限階的  $f$  的個數  $r - h$ , 用  $v$  表示其餘的  $f$  的個數  $n - r$ , 並且把記法  $\delta_{h+i}$  改為  $\delta_i$ . 於是,

$$(20) \quad \mathfrak{R} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \dots \oplus \{f_t\},$$

這裡

$$(21) \quad \mathfrak{S}_{f_j} = (\delta_j) \quad (j = 1, \dots, u), \quad \mathfrak{S}_{f_k} = (0)$$

$$(k = u + 1, \cdots, t): \delta_i | \delta_{j'}, (i \leq j').$$

在普通的交換羣情形，我們的結果就特殊化成下面的兩個定理：

**定理 8.** 任意有限生成的交換羣是循環羣的直接和。

**定理 9.** 任意有限生成的交換羣是一個有限羣與一個自由羣直接和。

有限羣是  $\mathfrak{G} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \cdots \oplus \{f_n\}$ ；如果  $\delta_i$  正規化為正數，則  $\mathfrak{G}$  的階是  $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n$ 。

**10. 不變性定理** 本節要証：階理想  $(\delta_1), (\delta_2), \cdots, (\delta_u)$  及自由部分  $\{f_{u+1}\} \oplus \{f_{u+2}\} \oplus \cdots \oplus \{f_t\}$  里  $f$  的個數  $v = t - u$  是不變的。今先討論証明中需要的關於  $\mathfrak{o}$ -模方面的觀念。

令  $\mathfrak{R}$  是一個  $\mathfrak{o}$ -模， $\mathfrak{G}$  是一個子模，而  $\mathfrak{R}/\mathfrak{G}$  是陪集  $x + \mathfrak{G}$  的商羣。如果  $\alpha \in \mathfrak{o}$  而  $x + \mathfrak{G} \in \mathfrak{R}/\mathfrak{G}$ ，定義  $\alpha(x + \mathfrak{G}) = \alpha x + \mathfrak{G}$ 。因為  $\mathfrak{G}$  在純量乘法下是封閉的，故這裡給出的結果  $\alpha x + \mathfrak{G}$  與陪集  $x + \mathfrak{G}$  里選取的代表  $x$  無關。我們易知， $\mathfrak{R}/\mathfrak{G}$  關於這個純量乘法的定義化為一個  $\mathfrak{o}$ -模，它的証明與在向量空間的証明相同（參看第一章，§ 9）。我們還注意到：如果  $\mathfrak{R}$  是有限生成的，生成元素是  $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ ，則  $\mathfrak{R}/\mathfrak{G}$  是有限生成的，其生成元素是  $e_1 + \mathfrak{G}, e_2 + \mathfrak{G}, \cdots, e_n + \mathfrak{G}$ 。

次設  $\mathfrak{B}$  是  $\mathfrak{o}$  里一個理想，對於所有  $\beta \in \mathfrak{B}$  及所有  $x \in \mathfrak{R}$  具有性質  $\beta x = 0$ 。令  $\bar{\alpha} = \alpha + \mathfrak{B}$  是差環  $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{B}$  里一個陪集，則定義  $\bar{\alpha}x = \alpha x$ 。如果  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1$ ，則  $\alpha - \alpha_1 = \beta \in \mathfrak{B}$ ，所以， $\alpha x = (\alpha_1 + \beta)x = \alpha_1 x$ 。故  $\bar{\alpha}x$  是  $\bar{\mathfrak{o}}$  里的  $\bar{\alpha}$  與  $\mathfrak{R}$  里的  $x$  的單值函數。容易驗證： $\mathfrak{R}$  是關於這個函數的一個  $\bar{\mathfrak{o}}$ -模。

今把不變性的証明分作若干段給出。首先，令  $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$  是一個自由模，其基為  $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 。令  $\mathfrak{R}$  是一個子模，並設  $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$  表示  $\mathfrak{R}$  的一個基。則用在定理 6 的証明里的新元素  $t'_i, v'_p$  分別構成  $\mathfrak{F}$  與  $\mathfrak{R}$  的基。由關係 (18) 聯結這些元素。今因為基元素沒有一個是 0，顯然 (18) 里有  $r = m$ 。所以， $t'$  的個數不少於  $v$  的個數；於是  $m \leq n$ 。如果  $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$ ，則可把  $t'$  與  $v'$  互換而証



得  $m = n$ . 这证明了自由  $\mathfrak{o}$ -模的任意基里元素的个数是不变数, 这里  $\mathfrak{o}$  为一个主理想整区. 仿照向量空间, 这个数目叫做自由模的维数.

次设  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$  的每个元有有限阶. 令

$$\mathfrak{S} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \cdots \oplus \{f_t\}$$

是另一种分解为循环子模使  $\mathfrak{S}'_{f_j} = (\delta'_j) \neq (0)$  而  $\delta'_j | \delta'_k (j \leq k)$ . 我们要证  $t = t'$  及  $(\delta_j) = (\delta'_j) (j = 1, 2, \dots, t)$ . 定义一个分解  $\mathfrak{S} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \cdots \oplus \{f_t\}$  的长度为  $\sum s_i$ , 这里  $s_i$  是  $\delta_i$  的长度. 设第一种分解有最小长度, 并且将用归纳法证明关于这个最小长度的定理.

令  $\pi$  是一个固定素数, 并令  $\mathfrak{S}'$  表示  $\mathfrak{S}$  里能使  $\pi y = 0$  的元素  $y$  的子集合.  $\mathfrak{S}'$  是  $\mathfrak{S}$  的一个子模. 设  $y = \sum \gamma_i f_i \in \mathfrak{S}'$ , 则  $\sum \pi \gamma_i f_i = 0$ . 于是,  $\pi \gamma_i$  可用  $\delta_i$  除尽. 由此推得  $\delta_i | \gamma_i$ , 或是  $\pi \delta_i$ . 如果前者成立, 则  $\gamma_i f_i = 0$ ; 如果后者成立, 则  $\gamma_i$  是  $\epsilon_i = \delta_i \pi^{-1}$  的一个倍数. 故  $y$  的形状为  $\sum_h \rho_h \epsilon_h f_h$ , 这里  $h$  是最小整数能使  $\delta_h$  被  $\pi$  除尽的. 这就证明了

$$\mathfrak{S}' = \{\epsilon_h f_h\} \oplus \{\epsilon_{h+1} f_{h+1}\} \oplus \cdots \oplus \{\epsilon_t f_t\}.$$

同理, 得

$$\mathfrak{S}' = \{\epsilon'_h f'_h\} \oplus \cdots \oplus \{\epsilon'_{t'} f'_{t'}\}.$$

因为  $\mathfrak{S}'$  的每个元素适合方程  $\pi y = 0$ , 而  $\mathfrak{S}'$  可看作  $\bar{\mathfrak{o}}$ -模, 其中  $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/(\pi)$ . 因为  $\pi$  是素数, 故知  $\bar{\mathfrak{o}}$  是一个域 (参看本书第一卷, 习题 48 的第 2 题). 于是,  $\mathfrak{S}'$  是  $\bar{\mathfrak{o}}$  上一个向量空间. 故由维数不变性定理 (或由关于自由模的上面结果) 知, 两种分解里基元素的个数相同. 因此,  $t - h = t' - h'$ .

今选取  $\pi$  是  $\delta_1$  的一个因子, 则  $h = 1$ , 而方程  $t - h = t' - h'$  指明  $t' \geq t$ . 同理, 如果取  $\pi$  是  $\delta'_1$  的一个因子, 则得  $t \geq t'$ . 故  $t = t'$ . 我们今知道, 如果选取  $\pi$  是  $\delta_1$  的一个因子, 则  $h = 1$  可推得  $h' = 1$ ; 因此  $\pi$  就也是  $\delta'_1$  的一个因子.

其次考虑子模  $\pi \mathfrak{S}$ . 刚才使用的论证指出:

$$(22) \quad \begin{aligned} \pi\Theta &= \{\pi f_k\} \oplus \{\pi f_{k+1}\} \oplus \cdots \oplus \{\pi f_t\} \\ &= \{\pi f'_{k'}\} \oplus \{\pi f'_{k'+1}\} \oplus \cdots \oplus \{\pi f'_{t'}\}, \end{aligned}$$

这里  $k$  与  $k'$  分别是能使  $\delta_k$  与  $\delta_{k'}$  不是  $\pi$  的相伴数的最小整数. 于是,  $\pi f_t$  的阶理想是  $(\varepsilon_t)$ , 而  $\pi f'_{t'}$  的阶理想是  $(\varepsilon'_{t'})$ , 并且  $\varepsilon_t$  与  $\varepsilon'_{t'}$  适合可除性条件. 至此, 我们可用归纳法假设于模的长度而推得  $t - k = t' - k'$ , 及  $(\varepsilon_k) = (\varepsilon'_{k'})$ ,  $(\varepsilon_{k+1}) = (\varepsilon'_{k'+1})$ ,  $\cdots$ . 这些关系还推得  $(\delta_1) = (\delta'_1)$ ,  $(\delta_2) = (\delta'_2)$ ,  $\cdots$ . 这就证明了模  $\Theta$  的  $(\delta_i)$  的不变性.

最后, 考虑一般情形. 如果  $\Theta$  是有限阶元素所组成的子模, 刚才证明的结果指出: 有限阶的  $f_i$  的个数  $u$  与有限阶的  $f'_i$  的个数  $u'$  相同. 再则关于对应的阶理想有  $(\delta_i) = (\delta'_i)$ . 今考虑模  $\mathfrak{R}/\Theta$ ; 我们易知这个模是自由模, 以  $f_{u+1} + \Theta, \cdots, f_t + \Theta$  为基, 而且也以  $f'_{u+1} + \Theta, \cdots, f'_{t'} + \Theta$  为基. 故由对于自由模已证的结果知,  $t - u = t' - u'$ . 这就完成了下面的定理的证明:

**定理 10.** 令  $\mathfrak{R} = \{f_1\} \oplus \cdots \oplus \{f_t\} = \{f'_1\} \oplus \cdots \oplus \{f'_{t'}\}$  是一个  $\mathfrak{o}$ -模的两种分解为非零的循环模, 这里  $\mathfrak{o}$  是一个主理想整环. 设阶理想适合条件 (21), 而对于  $f'_i$  有类似的情况, 则  $t = t'$ , 而  $\mathfrak{S}_{f_i} = \mathfrak{S}_{f'_i} (i = 1, 2, \cdots, t)$ .

刚才证明的模定理可用以证明阵的不变因子的唯一性, 除了单位因子不计. 故得下面的定理

**定理 11.** 如果  $\text{diag} \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r, 0, \cdots, 0\}$  与  $\text{diag} \{\delta'_1, \delta'_2, \cdots, \delta'_{r'}, 0, \cdots, 0\}$  是等价的  $m \times n$  阵, 它们的元素在一个主理想整环  $\mathfrak{o}$  里, 并且  $\delta_i | \delta_j (i \leq j)$ ,  $\delta'_k | \delta'_l (k \leq l)$ , 则  $r = r'$ , 而  $\delta_i$  是  $\delta'_i (i = 1, 2, \cdots, r)$  的相伴元素.

证 令  $\mathfrak{F}$  是基为  $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$  的一个自由模, 并令  $\mathfrak{R}$  是由  $v_1 = \delta_1 t_1, \cdots, v_r = \delta_r t_r, v_{r+1} = 0, \cdots, v_m = 0$  生成的子模. 则  $\mathfrak{F}/\mathfrak{R}$  是循环模与  $n - r$  维的一个自由模的直接和, 而这些循环模的阶理想是  $(\delta_1), (\delta_2), \cdots, (\delta_r)$ . 另一方面, 由等价的假设可推得: 我们能求出  $\mathfrak{R}$  的一个新基  $(t'_1, t'_2, \cdots, t'_n)$  及  $\mathfrak{R}$  的新生成元素  $v'_1 = \delta'_1 t'_1, v'_2 = \delta'_2 t'_2, \cdots, v'_{r'} = \delta'_{r'} t'_{r'}, v'_{r'+1} = 0, \cdots, v'_m = 0$ .

这就给出  $\mathfrak{S}/\mathfrak{M}$  分解为循环模与  $n-r$  维的一个自由模的直接和, 而这些循环模的阶理想是  $(\delta'_1), (\delta'_2), \dots, (\delta'_r)$ . 因为可除性条件成立, 故由定理 10 推得  $r=r'$  及  $(\delta_i) \neq (1)$  时  $(\delta_i) = (\delta'_i)$ . 由此可推知, 对于所有  $i$  有  $(\delta_i) = (\delta'_i)$ .

次就这个结果给出另一个纯粹用阵的证明. 与此同时还得出计算不变因子的一些有用公式.

我们首先观察到: 如果  $(v)$  是任意  $m \times n$  阵, 则  $(v)(\sigma)$  的行是  $(\sigma)$  的行的线性组合. 故  $(v)(\sigma)$  对于任意  $j$  的  $j$ -行子式是  $(\sigma)$  的  $j$ -行子式的线性组合. 同理,  $(\sigma)(\mu)$  的  $j$ -行子式是  $(\sigma)$  的  $j$ -行子式的线性组合. 合併这两个结果可见,  $(v)(\sigma)(\mu)$  的  $j$ -行子式是  $(\sigma)$  的  $j$ -行子式的线性组合. 今令  $\Delta_j(\sigma)$  是  $(\sigma)$  的  $j$ -行子式的一个最高公因子, 则我们的结果指出: 如果  $(\tau) = (v)(\sigma)(\mu)$ , 则  $\Delta_j(\sigma) | \Delta_j(\tau)$ . 如果  $(\mu)$  及  $(v)$  是单位, 则还有  $\Delta_j(\tau) | \Delta_j(\sigma)$ . 于是,  $\Delta_j(\tau)$  与  $\Delta_j(\sigma)$  是相伴的. 今应用这个结果于等价的阵的范式

$$\begin{aligned} & \text{diag } \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r, 0, \dots, 0\}, \\ & \text{diag } \{\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_r, 0, \dots, 0\}. \end{aligned}$$

对于这些阵的  $\Delta_j$  分别记做  $\Delta_j$  及  $\Delta'_j$ . 因为关于  $\delta$  及  $\delta'$  的可除性条件, 故可取

$$\Delta_j = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_j \quad \text{及} \quad \Delta'_j = \delta'_1 \delta'_2 \cdots \delta'_j.$$

因为对于每个  $j$ ,  $\Delta_j$  是  $\Delta'_j$  的相伴数, 故  $r=r'$ . 又  $\Delta_1 = \delta_1$  是  $\Delta'_1 = \delta'_1$  的相伴数. 而  $\delta_1 \delta_2$  是  $\delta'_1 \delta'_2$  的相伴数, 可推得  $\delta_2$  与  $\delta'_2$  是相伴的. 这样继续下去可见: 对于每个  $i$ ,  $\delta_i$  与  $\delta'_i$  是相伴数. 这就还证明了下面的定理.

**定理 12.** 令  $\Delta_j(\sigma)$  是  $(\sigma)$  的  $j$ -行子式的一个最高公因子, 并设  $j \leq r$  时  $\Delta_j(\sigma) \neq 0$ , 则元素  $\delta_1 = \Delta_1(\sigma)$ ,  $\delta_2 = \Delta_2(\sigma) \Delta_1(\sigma)^{-1}$ ,  $\dots$ ,  $\delta_r = \Delta_r(\sigma) \Delta_{r-1}(\sigma)^{-1}$  构成  $(\sigma)$  的不变因子的集合.

**11. 向量空间关于线性变换的分解** 今来论述  $\Phi$  上向量空间里一个线性变换  $A$ . 我们应用上面结果于由  $A$  决定的  $\Phi[\lambda]$ -模

$\mathfrak{R}$ . 因为每个向量  $x$  有一个指导多项式  $\mu_x(\lambda) \neq 0$ ,  $\mathfrak{R} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \cdots \oplus \{f_l\}$ , 这里  $\mathfrak{I}_{f_i} = (\delta_i) \neq (0)$ ,  $\neq (1)$ , 并且如果  $j \leq h$ , 则  $\delta_j | \delta_h$ . 故不变因子理想  $(\delta_i)$  是唯一决定的.

如果  $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$  是  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}$  的一个基, 而  $e_i A = \sum \alpha_{ij} e_j$ , 则  $(\alpha)$  是  $A$  关于这个基的阵, 而元素  $v_i = \sum \alpha_{ij} t_j - \lambda t_i$  构成自由模  $\mathfrak{F}$  与  $\mathfrak{R}$  之间的同态  $T$  的核  $\mathfrak{R}$  的一个基. 所以, 必须化为范式以求不变因子理想的阵是

$$(23) \quad (\sigma) = \lambda 1 - (\alpha) = \begin{bmatrix} \lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \lambda - \alpha_{22} & \cdots & -\alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & \lambda - \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

这个阵的范式是

$$(24) \quad \text{diag} \{1, 1, \cdots, 1, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l\},$$

这里假定  $\delta_i = \delta_i(\lambda)$  的首项系数是 1. 我们的结果还指出怎样获得  $i$  的一个集合使  $\mathfrak{R} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \cdots \oplus \{f_l\}$ . 如果  $(\mu)$  及  $(\nu)$  是单位阵使  $(\nu)(\sigma)(\mu)$  是范式, 并且  $e'_i = \sum \mu_{ij}^* e_j$ ,  $(\mu^*) = (\mu)^{-1}$ , 则可取  $f_i = e'_{n-l+i}$ .

把循环子空间  $\{f_i\}$  里的  $\Phi$ -基合拢起来得  $\mathfrak{R}$  的一个  $\Phi$ -基. 如果  $\delta_i$  的度数是  $n_i$ , 则  $(f_i, f_i A, \cdots, f_i A^{n_i-1})$  是  $\{f_i\}$  的一个基. 于是,

$$(f_1, f_1 A, \cdots, f_1 A^{n_1-1}; f_2, f_2 A, \cdots, f_2 A^{n_2-1}; \cdots; \cdots, f_l A^{n_l-1})$$

是  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}$  的一个基.  $A$  关于这个基的阵的形状是

$$(25) \quad \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_l \end{bmatrix},$$

这里, 对角块  $B_i$  是  $\delta_i(\lambda)$  的友阵. 由不变因子理想所完全决定的阵 (25) 叫作  $A$  的约当典型阵.

使用下面的考察可得更精致的典型陣. 令

$$\delta_i(\lambda) = \pi_{i_1}(\lambda)^{k_{i1}} \pi_{i_2}(\lambda)^{k_{i2}} \cdots \pi_{i_{s_i}}(\lambda)^{k_{is_i}}$$

是  $\delta_i$  分解为不同素因子的幂的因子分解. 由 § 4 的定理 3 得  $\{f_i\} = \{f_{i1}\} \oplus \{f_{i2}\} \oplus \cdots \oplus \{f_{is_i}\}$ , 这里  $f_{ij}$  的指导多项式是  $\pi_{ij}(\lambda)^{k_{ij}}$ . 今在每个  $\{f_{ij}\}$  里选取本章 § 4 上所給类型的一个基, 这些基合并起来就給出  $A$  的一个基, 而  $A$  关于这个基的陣是

$$(26) \quad \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & C_2 & \\ & & \ddots \\ & & & C_t \end{bmatrix},$$

这里  $C_i$  与(25)里  $B_i$  的阶相同, 而

$$(27) \quad C_i = \begin{bmatrix} C_{i1} & & \\ & C_{i2} & \\ & & \ddots \\ & & & C_{is_i} \end{bmatrix},$$

这里

$$(28) \quad C_{ij} = \begin{bmatrix} P_{ij} & & \\ N_{ij} & P_{ij} & \\ & N_{ij} & P_{ij} \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & N_{ij} & P_{ij} \end{bmatrix} \quad (k_{ij} \text{ 个块}),$$

并且  $P_{ij}$  是  $\pi_{ij}(\lambda)$  的友陣, 而  $N_{ij}$  具有(10)的形状. 这样得出的陣叫做  $A$  的古典典型陣. 它显出素因子  $\pi_{ij}(\lambda)$  及这些素因子在  $\delta_i(\lambda)$  的因子分解里的指数. 理想  $(\pi_{ij}(\lambda)^{k_{ij}})$  叫做  $A$  的初等因子理想. 多项式  $\pi_{ij}(\lambda)^{k_{ij}}$  叫做  $(\sigma) = \lambda 1 - (\alpha)$  的初等因子.

例如, 設  $\lambda 1 - (\alpha)$  里  $\neq 1$  的不变因子是  $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$  及  $\lambda^6 - 3\lambda^4 + 3\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1)^3$ , 則約当典型陣是

$$\left( \begin{array}{ccc|cccccc} 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 1 & 1 & & & & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

这里初等因子是  $(\lambda - 1)^2$ ,  $(\lambda + 1)$ ,  $(\lambda - 1)^3$ ,  $(\lambda + 1)^3$ . 所以, 古典典型阵是

$$\left( \begin{array}{ccc|c|ccc|ccc} 1 & 0 & & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & & & & & \\ \hline & & & & 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & & 1 & 1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & 1 & & & \\ \hline & & & & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

要说明求典型阵的方法, 令  $A$  是线性变换使

$$e_1 A = -e_1 - 2e_2 + 6e_3,$$

$$e_2 A = -e_1 + 3e_3,$$

$$e_3 A = -e_1 - e_2 + 4e_3,$$

这里阵  $(\alpha)$  是

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

而

$$\lambda I - (\alpha) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{bmatrix}.$$

我們有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda+2 & -3 \end{bmatrix} [\lambda I - (\alpha)] \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3+\lambda \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}.$$

故

$$(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3+\lambda \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\mu)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

而

$$e'_1 = e_1 + \lambda e_2 - 3e_3 = e_1 + e_2 A - 3e_3 = 0,$$

$$e'_2 = -e_2 + e_3,$$

$$e'_3 = -e_2.$$

要得出約当陣,我們使用基  $f_1 = e'_1, f_2 = e'_3, f_3 = e'_3 A = e_1 - 3e_3$ .

于是,約当陣是

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}} & \end{bmatrix}.$$

把  $(\alpha)$  变到这个陣的陣是  $(f_1, f_2, f_3)$  关于  $(e_1, e_2, e_3)$  的陣,而這個陣是

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$





## 習 題 25

1. 求与

$$\begin{bmatrix} 17 & -8 & -12 & 14 \\ 46 & -22 & -35 & 41 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

相似的古典典型陣,并求使这个陣变为典型陣的陣.

2. 証明下面定理:  $\Phi_n$  里两个陣  $(\alpha)$  与  $(\beta)$  相似的充要条件是  $\lambda 1 - (\alpha)$  与  $\lambda 1 - (\beta)$  在  $\Phi[\lambda]_n$  里有相同的不变因子.

3. 証明:任意陣与它的折轉陣相似.

4. 已知初等因子为  $(\lambda-1)^3$ ,  $(\lambda-1)$ ,  $(\lambda^3+1)^4$ ,  $(\lambda^3+1)^3$ ,  $(\lambda^3+1)$ ,  $(\lambda+2)$ , 則不变因子是什么?

5. 証明:如果  $f$  是任意向量,它的指导多項式是  $A$  的最低多項式,則存在一个不变子空間  $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}A \subseteq \mathfrak{S})$  使  $\mathfrak{R} = \{f\} \oplus \mathfrak{S}$ .

6. 令  $\mathfrak{S}$  是一个不变子空間使  $A$  在  $\mathfrak{S}$  里及在  $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$  里誘導出的变换的不变因子合併起来能給出  $A$  的所有不变因子. 証明:有另一个不变子空間  $\mathfrak{U}$  存在,使  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{U}$ .

**12. 特征多項式及最低多項式** 仍旧令  $\mathfrak{R} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \cdots \oplus \{f_r\}$ , 这里  $f_i$  的阶理想是不变因子理想  $(\delta_i)$ . 故  $f_i$  的指导式是  $\delta_i$ , 而且如果  $i \leq j$  时  $\delta_i | \delta_j$ . 我們知道,  $A$  的最低多項式  $\mu(\lambda)$  是生成元素  $f_i$  的指导多項式的最小公倍式. 由可除性条件知, 这个 l. c. m. 是  $\delta_r(\lambda)$ . 故  $\mu(\lambda) = \delta_r(\lambda)$ .

今令  $(\alpha)$  是  $A$  的任意陣. 我們知道, 如果  $\Delta_n(\lambda) = \det(\lambda 1 - (\alpha))$ , 而  $\Delta_{n-1}(\lambda)$  是  $\lambda 1 - (\alpha)$  的  $(n-1)$ -行子式的最高公因子, 則下面关系成立:

$$(31) \quad \Delta_n(\lambda) = \delta_1(\lambda)\delta_2(\lambda)\cdots\delta_r(\lambda),$$

$$(32) \quad \mu(\lambda) = \delta_r(\lambda) = \Delta_n(\lambda)[\Delta_{n-1}(\lambda)]^{-1}.$$

多項式  $\Delta_n(\lambda)$  叫做  $(\alpha)$  的(或  $A$  的)特征多項式. 如果引用(23), 可見

$$(33) \quad \Delta_n(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^n\alpha_n,$$

这里  $\alpha_i$  是  $(\alpha)$  里  $i$  阶对角子式的和; 其中特別重要的是第一个及末了一个  $\alpha$ , 它們是

$$(34) \quad \alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}, \quad \alpha_n = \det(\alpha).$$

前者叫做  $(\alpha)$  的迹.  $(\alpha)$  的这个函数的性質将在 § 14 里詳述.

至此我們知道, 如果  $v(\lambda)$  是使  $v(A) = 0$  的任意多項式, 則  $v((\alpha)) = 0$ . 如果  $\mu(\lambda)$  是  $A$  的最低多項式, 則  $\mu(\lambda)$  也是  $(\alpha)$  的最低多項式, 所以, 我們的結果可述成下面关于陣的定理:

**定理 13.** 令  $(\alpha)$  是  $\Phi_n$  里一个陣, 并且令  $\Delta_n(\lambda) = \det(\lambda 1 - (\alpha))$ , 及  $\mu(\lambda) = \Delta_n(\lambda) [\Delta_{n-1}(\lambda)]^{-1}$ , 这里  $\Delta_{n-1}(\lambda)$  是  $\lambda 1 - (\alpha)$  的  $(n-1)$ -行子式的最高公因子. 則 1)  $\Delta_n((\alpha)) = \mu((\alpha)) = 0$ ; 2) 如果  $v(\lambda)$  是使  $v((\alpha)) = 0$  的任意多項式, 則  $\mu(\lambda) | v(\lambda)$ ; 3)  $\mu(\lambda)$  及  $\Delta_n(\lambda)$  有相同的素因子.

由关于  $A$  所作的証明知, 前两个性質是显然成立的. 最后一个性質可由 (31) 及所有  $\delta_i(\lambda)$  是  $\delta_i(\lambda) = \mu(\lambda)$  的因子的事实得出.

定理 13 是汉米頓-凱萊关于特征多項式的定理及福路本紐斯关于最低多項式的定理的合成. 这些結果的直接用陣作証明見于下一节.

## 習 題 26

1. 証明:  $A$  是循环变换必須而且只須  $\lambda 1 - (\alpha)$  只有一个  $\neq 1$  的不变因子.
2. 証明: 如果  $(\alpha)$  是无势陣, 則  $\lambda 1 - (\alpha)$  的不变因子的形状都是  $\lambda^m$ . 由此証明: 任意无势陣与形状如

$$\begin{bmatrix} N_1 & & \\ & N_2 & \\ & & \ddots \\ & & & N_q \end{bmatrix}$$

的陣相似, 这里  $N_i$  的形状是

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. 証明: 元素在复数域里的陣与对角陣相似必須而且只須它的最低多項式沒有重根.

4. 証明: 如果  $(\alpha)$  是同势陣, 則  $\lambda 1 - (\alpha)$  的初等因子是  $\lambda$  或者是  $\lambda - 1$ . 应用这个結果証明第二章, § 13 末了一段关于  $\Delta$  是一个域时的結果.

5. 証明: 如果  $u$  是非零向量, 使  $uA = \rho u$ , 則  $\rho$  是特征多項式的根. 反过来, 証明: 如果  $\rho$  是特征多項式的一个根, 属于  $\Phi$  里, 則有非零向量  $u$  存在, 使  $uA = \rho u$ .

6. 使  $uA = \rho u$  的非零向量  $u$  叫做  $A$  的一个特征向量. 証明: 如果  $\Phi$  是代数閉域, 則这样的向量必然存在. 証明: 如果  $\Phi$  是实数域, 則  $\Phi$  上奇数維空間  $\mathfrak{R}$  里任意綫性变换拥有特征向量.

**13. 定理 13 的直接証明** 我們已給的定理 13 的証明若从陣論来看未免覺得有些不直率. 本节将推广含于这个定理的結果并对这些結果給出直接的証明. 先設  $\mathfrak{o}$  是帶恆等元素的任意交換环, 令  $\mathfrak{o}[\lambda]$  是含不定量  $\lambda$  的多項式环, 并且討論陣环  $\mathfrak{o}[\lambda]_n$ ; 这个环含有元素属于  $\mathfrak{o}$  的陣的子环  $\mathfrak{o}_n$ , 它还含有陣

$$\lambda 1 = \text{diag} \{ \lambda, \lambda, \dots, \lambda \},$$

显然这个陣属于  $\mathfrak{o}[\lambda]_n$  的心. 当前我們主要观察的目标是  $\mathfrak{o}[\lambda]_n = \mathfrak{o}_n[\lambda 1]$ , 而  $\lambda 1$  关于  $\mathfrak{o}_n$  是超越元素. 这因为, 令  $(\alpha(\lambda))$  是  $\mathfrak{o}[\lambda]_n$  里一个任意陣, 并記

$$(35) \quad \alpha_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij0} + \alpha_{ij1}\lambda + \alpha_{ij2}\lambda^2 + \dots,$$

如果我們忆起积  $(\alpha)\lambda 1$  可由以  $\lambda$  乘  $(\alpha)$  的所有元素而得, 則可知:

$$(36) \quad (\alpha(\lambda)) = (\alpha)_0 + (\alpha)_1\lambda 1 + (\alpha)_2(\lambda 1)^2 + \dots,$$

这里  $(\alpha)_k$  是陣, 它的  $(i, j)$ -位置上的元素是  $\alpha_{ijk}$ . 次設  $(\alpha)_0 + (\alpha)_1\lambda 1 + (\alpha)_2(\lambda 1)^2 + \dots = 0$ , 則左端的  $(i, j)$ -元素可由(35)給出. 因为这个元素等于 0, 故  $\alpha_{ijk} = 0$ . 于是, 每个  $(\alpha)_k = 0$ , 这就証明了  $\lambda 1$  关于  $\mathfrak{o}_n$  的超越性.

如果

$$\phi(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 + \dots$$

是  $\mathfrak{o}[\lambda]$  里一个多項式, 則  $\phi((\alpha))$  是陣

$$\beta_0 1 + \beta_1(\alpha) + \beta_2(\alpha)^2 + \dots,$$

这里  $\beta_i(\gamma)$  通常可由以  $\beta_i$  乘  $(\gamma)$  的所有元素而得出. 故  $\phi((\alpha))$  可由  $\phi(\lambda)1 = \beta_0 1 + \beta_1(\lambda 1) + \beta_2(\lambda 1)^2 + \dots$  里以  $(\alpha)$  代替  $\lambda 1$  而得.

如果  $(\alpha) \in \mathfrak{o}_n$ , 則定义特征多項式  $\Delta_n(\lambda)$  是属于  $\mathfrak{o}[\lambda]$  的多項式  $\det(\lambda 1 - (\alpha))$ . 今証下面的定理.

**定理 14(漢米頓-凱萊).** 如果  $(\alpha) \in \mathfrak{o}_n$ ,  $\mathfrak{o}$  是帶恆等元素的一个交換環, 而  $\Delta_n(\lambda)$  是特征多項式, 則  $\Delta_n((\alpha)) = 0$ .

証 我們已知恆等式<sup>1)</sup>

1) 見本書第一卷, 第二章的 § 4

(37)  $[\lambda 1 - (\alpha)] \text{adj}[\lambda 1 - (\alpha)] = \det(\lambda 1 - (\alpha))1 = \Delta_n(\lambda)1$ ,  
 陣  $\text{adj}[\lambda 1 - (\alpha)] \in o[\lambda]_n = o_n[\lambda 1]$ , 而它的元素的次数  $\leq n-1$ ,  
 所以

$$\text{adj}[\lambda 1 - (\alpha)] = (\beta)_0(\lambda 1)^{n-1} + (\beta)_1(\lambda 1)^{n-2} + \cdots + (\beta)_{n-1}.$$

还有, 如果  $\Delta_n(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n\alpha_n$ , 則

$$\Delta_n(\lambda)1 = (\lambda 1)^n - \alpha_1(\lambda 1)^{n-1} + \cdots + (-1)^n\alpha_n1.$$

故恆等式(37)等价于

$$(38) \quad [\lambda 1 - (\alpha)][(\beta)_0(\lambda 1)^{n-1} + (\beta)_1(\lambda 1)^{n-2} + \cdots + (\beta)_{n-1}] \\ = (\lambda 1)^n - \alpha_1(\lambda 1)^{n-1} + \cdots + (-1)^n\alpha_n1.$$

因此知  $\lambda 1 - (\alpha)$  是  $o_n[\lambda 1]$  里  $\Delta_n(\lambda)1$  的一个因子, 按因子定理<sup>1)</sup>, 这可推得

$$(\alpha)^n - \alpha_1(\alpha)^{n-1} + \cdots + (-1)^n\alpha_n1 = 0,$$

就是所要証明的結果了.

次設  $o$  是一个高斯整区, 亦即带恆等元素的一个可交换整区, 因子唯一分解定理在这个整区里成立, 对于这样整区有下面的

**定理 15** (福路本紐斯). 令  $(\alpha) \in o_n$ , 这里  $o$  是一个高斯整区, 并且令  $\Delta_n(\lambda) = \det(\lambda 1 - (\alpha))$  及  $\mu(\lambda) = \Delta_n(\lambda)[\theta(\lambda)]^{-1}$ , 这里  $\theta(\lambda)$  是  $\lambda 1 - (\alpha)$  的  $(n-1)$ -行子式的最高公因子, 則 1)  $\mu((\alpha)) = 0$ , 2) 如果  $v(\lambda) \in o[\lambda]$  而  $v((\alpha)) = 0$ , 則在  $o[\lambda]$  里  $\mu(\lambda) | v(\lambda)$ , 3)  $\Delta_n(\lambda)$  的任意不可約因子是  $\mu(\lambda)$  的一个因子.

**証** 因为  $o[\lambda]$  是一个高斯整区, 保证了  $o(\lambda)$  的存在. 因为  $(n-1)$ -行子式中有些(例如, 对角綫上子式)的首項系数是 1, 故可設  $(\lambda)$  的首項系数是 1. 因为  $\theta(\lambda)$  是所有  $(n-1)$ -行子式的一个因子, 显然它是  $\Delta_n(\lambda)$  的一个因子. 商  $\mu(\lambda)$  的首項系数是 1. 今令  $(\gamma(\lambda))$  表示  $o[\lambda]_n$  里的陣, 由以  $\theta(\lambda)$  除  $\text{adj}[\lambda 1 - (\alpha)]$  的元素而得出, 則由(37)有

$$(39) \quad [\lambda 1 - (\alpha)](\gamma(\lambda)) = \mu(\lambda)1.$$

由前面証明里所用的論証知, 这个关系可推得  $\mu((\alpha)) = 0$ . 这

1) 見本书第一卷, 第三章, § 6.

証明了 1).

今令  $\mu^*(\lambda)$  是能使  $\mu^*(\alpha) = 0$  的最低次非零多項式, 我們可假定  $\mu^*(\lambda)$  是本原多項式. 設  $v(\lambda)$  是使  $v(\alpha) = 0$  的任意多項式. 如果  $P$  是  $\mathfrak{o}$  的商域, 則在  $P[\lambda]$  里可寫出

$$v(\lambda) = q(\lambda)\mu^*(\lambda) + r(\lambda),$$

这里  $\deg r(\lambda) < \deg \mu^*(\lambda)$ . 用  $\mathfrak{o}$  里一个适宜的非零元素  $\eta$  乘它, 得关系

$$\eta v(\lambda) = q_1(\lambda)\mu^*(\lambda) + r_1(\lambda),$$

这里  $q_1(\lambda) = \eta q(\lambda)$ , 而  $r_1(\lambda) = \eta r(\lambda) \in \mathfrak{o}[\lambda]$ . 把  $(\alpha)$  代入这个关系得  $r_1(\alpha) = 0$ . 于是, 由  $\mu^*(\lambda)$  的次数是最低的假設知  $r_1(\lambda) = 0$ . 故  $\mu^*(\lambda) | \eta v(\lambda)$ . 因为  $\mu^*(\lambda)$  是本原的, 故  $\mu^*(\lambda) | v(\lambda)$ . 特別有  $\mu^*(\lambda) | \mu(\lambda)$ ; 又因为  $\mu(\lambda)$  的首項系数是 1, 故可假定  $\mu^*(\lambda)$  的首項系数也是 1.

今令  $\mu(\lambda) = \mu^*(\lambda)\rho(\lambda)$ . 因为  $\mu^*(\alpha) = 0$ , 故把証明 1) 所用的論証倒轉就可見

$$\mu^*(\lambda)1 = [\lambda 1 - (\alpha)](\delta(\lambda)),$$

这里  $(\delta(\lambda)) \in \mathfrak{o}[\lambda]_n$ . 于是,

$$\Delta_n(\lambda)1 = \mu^*(\lambda)\rho(\lambda)\theta(\lambda)1 = [\lambda 1 - (\alpha)](\delta(\lambda))\rho(\lambda)\theta(\lambda)1.$$

如果与 (37) 比較, 并使用  $\lambda 1 - (\alpha)$  不是  $\mathfrak{o}[\lambda]_n$  里的零因子的事实<sup>1)</sup>, 得

$$\text{adj} [\lambda 1 - (\alpha)] = (\delta(\lambda))\rho(\lambda)\theta(\lambda)1,$$

故  $\lambda 1 - (\alpha)$  的所有  $(n-1)$ -行子式可以  $\rho(\lambda)\theta(\lambda)$  整除. 因为假設  $\theta(\lambda)$  是  $(n-1)$ -行子式的最高公因子, 故知  $\rho(\lambda) = 1$ . 于是,  $\mu(\lambda) = \mu^*(\lambda)$ ; 而 2) 就可由上面的証明得出.

要証 3), 可于 (39) 的两端求行列式, 得

$$\Delta_n(\lambda)\det(\gamma(\lambda)) = [\mu(\lambda)]^n.$$

而 3) 就是这結果的一个直接推理.

---

1) 它的行列式是  $\Delta_n[\lambda] \neq 0$ .

## 習 題 27

1. 証明:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ -\alpha_1 & \alpha_0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

的特征多項式与最低多項式分別是

$$(\lambda^4 - 2\alpha_0\lambda + (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2))$$

与

$$\lambda^4 - 2\alpha_0\lambda + (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2).$$

**14. 跡及特征多項式的形式的性質**  $(\alpha)$  的跡  $\text{tr}(\alpha)$  曾定义为  $(\alpha)$  的特征多項式里  $\lambda^{n-1}$  的系数的負值. 由此知

$$(40) \quad \text{tr}(\alpha) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}.$$

如果在某扩张域里, 特征多項式  $\Delta_n(\lambda) = \Pi(\lambda - \rho_i)$ , 則  $\rho_i$  叫做  $(\alpha)$  在这个域里的特征根.  $\Delta_n(\lambda)$  的系数是所謂  $\rho_i$  的初等对称函数. 特別是,

$$(41) \quad \text{tr}(\alpha) = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n.$$

由(40), 跡函数显然是綫性的:

$$(42) \quad \begin{aligned} \text{tr}[(\alpha) + (\beta)] &= \text{tr}(\alpha) + \text{tr}(\beta), \\ \text{tr}(\rho(\alpha)) &= \rho \text{tr}(\alpha). \end{aligned}$$

我們还可驗證下面的性質:

$$(43) \quad \text{tr}(\alpha)(\beta) = \text{tr}(\beta)(\alpha).$$

这因为,  $(\alpha)(\beta)$  的  $(i, i)$ -元素是  $\sum_j \alpha_{ij}\beta_{ji}$ , 故

$$\text{tr}(\alpha)(\beta) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\beta_{ji},$$

而这是  $(\alpha)$  与  $(\beta)$  里元素的对称函数. 故(43)成立.

不但  $(\alpha)(\beta)$  与  $(\beta)(\alpha)$  的跡相同, 它們的特征多項式里其它系数也是相同的, 因此它們有相同的特征多項式; 这也可以直接驗證的, 但下面的間接証明有它的特別趣味.

我們更一般地假設  $(\alpha)$  是一个  $m \times n$  陣, 而  $(\beta)$  是一个  $n \times m$  陣, 它們的元素都在一个域里. 于是, 乘法  $(\alpha)(\beta)$  或  $(\beta)(\alpha)$  都是可能的, 它們的积順序是  $m \times m$  陣与  $n \times n$  陣. 令  $n \geq m$ , 我

們將證  $(\beta)(\alpha)$  的特征多項式是  $(\alpha)(\beta)$  的特征多項式的  $\lambda^{n-m}$  倍。  
先設  $(\alpha)$  的形狀是

$$(44) \quad (\alpha) = \text{diag} \{ \overbrace{1, \cdots, 1}^r, 0, \cdots, 0 \}.$$

如果

$$(\beta) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nm} \end{bmatrix},$$

則

$$(\alpha)(\beta) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \cdots & \beta_{rm} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$(\beta)(\alpha) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{21} & \cdots & \beta_{2r} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nr} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

所以, 如果  $g(\lambda)$  表示

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \cdots & \beta_{rr} \end{bmatrix}$$

的特征多項式, 則  $(\alpha)(\beta)$  与  $(\beta)(\alpha)$  的特征多項式順序是  $\lambda^{m-r}g(\lambda)$  与  $\lambda^{n-r}g(\lambda)$ . 这就証明了我們的論斷。

今設  $(\alpha)$  是任意陣, 則有陣  $(\mu) \in L(\Phi, m)$  及陣  $(\nu) \in L(\Phi, n)$  存在使  $(\mu)(\alpha)(\nu) = (\alpha)_1$  的形狀为 (44). 令  $(\nu)^{-1}(\beta)(\mu)^{-1} = (\beta)_1$ . 則由上面的証明知,  $(\beta)_1(\alpha)_1$  的特征多項式是  $(\alpha)_1(\beta)_1$  的特征多項式的  $\lambda^{n-m}$  倍. 另一方面,

$$(\alpha)_1(\beta)_1 = (\mu)(\alpha)(\nu)(\nu)^{-1}(\beta)(\mu)^{-1} = (\mu)(\alpha)(\beta)(\mu)^{-1}$$

与  $(\alpha)(\beta)$  相似, 而

$$(\beta)_1(\alpha) = (v)^{-1}(\beta)(\mu)^{-1}(\mu)(\alpha)(v) = (v)^{-1}(\beta)(\alpha)(v)$$

与  $(\beta)(\alpha)$  相似. 故  $(\alpha)(\beta)$  与  $(\alpha)_1(\beta)_1$  有相同的特征多项式, 而  $(\beta)(\alpha)$  与  $(\beta)_1(\alpha)_1$  有相同的特征多项式. 故所论断的结果对于  $(\alpha)(\beta)$  及  $(\beta)(\alpha)$  成立, 这证明了下面的定理.

**定理 16.** 令  $(\alpha)$  是一个  $m \times n$  阵而  $(\beta)$  是一个  $n \times m$  阵, 它们的元素在一个域内. 如果  $n \geq m$ , 则  $(\beta)(\alpha)$  的特征多项式是  $(\alpha)(\beta)$  的特征多项式的  $\lambda^{n-m}$  倍.

### 習 題 28

1. (弗兰得斯 Flanders). 証明:  $(\alpha)(\beta)$  与  $(\beta)(\alpha)$  里不得用  $\lambda$  整除的初等因子相同. 还求出以  $\lambda$  的幂作初等因子的关系.

**15. 循环  $\mathfrak{o}$ -模的  $\mathfrak{o}$ -自同态环** 本章余下各节将论述决定綫性变换能与一个給定的綫性变换可交换的問題, 并且把这个問題推广于模.

如果  $A$  是  $\Phi$  上的  $\mathfrak{R}$  里一个綫性变换, 則与  $A$  可交换的綫性变换的全体  $\mathfrak{B}$  是  $\mathfrak{E}$  的一个子代数. 如果  $B \in \mathfrak{B}$ , 則  $\alpha_i B = B \alpha_i$ , 及  $AB = BA$ . 故  $B$  与属于由 1 与  $A$  所生成的子代数  $\mathfrak{A} = \Phi_i[A]$  的每个綫性变换  $\beta_0 + \beta_1 A + \beta_2 A^2 + \cdots$  可交换. 反过来, 如果  $B$  是羣  $\mathfrak{R}$  里任意自同构, 而它可与  $\mathfrak{A}$  里每个元素交换, 則  $B \in \mathfrak{B}$ ; 这因为对于所有  $\alpha$ ,  $\alpha_i B = B \alpha_i$ , 因此  $B$  是一个綫性变换, 而  $BA = AB$ .

如果  $\mathfrak{R}$  如前看作一个  $\Phi[\lambda]$ -模, 則

$$x(\beta_0 + \beta_1 A + \cdots) = \phi(\lambda)x,$$

这里  $\phi(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 \lambda + \cdots$ . 所以, 自同态  $B$  可与  $\mathfrak{A}$  里每个綫性变换交换必須而且只須  $(\phi(\lambda)x)B = \phi(\lambda)(xB)$ . 故  $\mathfrak{B}$  与  $\mathfrak{R}$  的  $\Phi[\lambda]$ -自同态的集合重合. 因此又誘使我們采取模的观点, 而考虑决定任意有限生成的  $\mathfrak{o}$ -模的  $\mathfrak{o}$ -自同态集合  $\mathfrak{B}$  的問題, 这里  $\mathfrak{o}$  是主理想整区. 显然  $\mathfrak{B}$  是羣  $\mathfrak{R}$  的自同态环的一个子环.

按通例, 以  $\mathfrak{o}_i$  表示自同态  $\alpha_i: x \rightarrow \alpha x$  的环, 这里  $\alpha \in \mathfrak{o}$ . 这个环是  $\mathfrak{o}$  的一个同态象, 故是可交换的. 因此  $\mathfrak{o}_i \subseteq \mathfrak{o}$ -自同态环  $\mathfrak{B}$ .  $\mathfrak{o}_i$  含于  $\mathfrak{B}$  的心, 也是显然的. 应该指出, 在由綫性变换  $A$  决定的



$\Phi[\lambda]$ -模的特殊情形, 环  $\Phi[\lambda]_t$  恰是环  $\mathfrak{M} = \Phi_t[A]$ .

我們先就循环  $\mathfrak{o}$ -模的特殊情形考虑决定  $\mathfrak{B}$  的問題. 这里无須假定  $\mathfrak{o}$  是一个主理想整区, 只假定  $\mathfrak{o}$  是带恒等元素的一个交换环. 我們有下面的定理.

**定理 17.** 如果  $\mathfrak{o}$  是带恒等元素的一个交换环, 而  $\mathfrak{M}$  是一个循环  $\mathfrak{o}$ -模, 則  $\mathfrak{M}$  僅有映照  $x \rightarrow ax$  這樣的  $\mathfrak{o}$ -自同態.

証 令  $\mathfrak{M} = \langle e \rangle$ , 并令  $B$  是  $\mathfrak{M}$  的一个  $\mathfrak{o}$ -自同态. 設  $eB = \beta e$ . 如果  $x = ae$ , 則  $xB = (ae)B = a(eB) = \beta(ae) = \beta x$ . 故  $B = \beta I$ .

**系** 如果  $A$  是域上向量空間里一个循环綫性變換, 則与  $A$  可交換的僅有綫性變換是含  $A$  的多項式(系數属于  $\Phi_t$ ).

## 習 題 29

1. 証明: 与

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

可交換的陣是

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & & & & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix},$$

这里  $\alpha_i$  是  $\Phi$  里任意元素.

## 16. 有限生成的 $\mathfrak{o}$ -模的 $\mathfrak{o}$ -自同态环的决定, $\mathfrak{o}$ 是主理想整区

今設  $\mathfrak{M}$  是一个有限生成的  $\mathfrak{o}$ -模, 而  $\mathfrak{o}$  是一个主理想整区. 我們知道,  $\mathfrak{M} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \cdots \oplus \{f_t\}$ , 这里如果阶理想  $\mathfrak{S}_i = (\delta_i)$  ( $i = 1, 2, \cdots, t$ ), 則

(45)  $j > u$  时  $\delta_i = 0$ , 并且对于所有  $i, j$  而  $i \leq j$  时  $\delta_i | \delta_j$ .

令  $B \in (\mathfrak{M} \text{ 的 } \mathfrak{o}\text{-自同态环}) \mathfrak{B}$ , 并且設  $f_i B = g_i$  ( $i = 1, 2, \cdots, t$ ).

如果  $x$  是  $\mathfrak{M}$  的任意元素, 則  $x = \sum \xi_i f_i$ ,  $\xi_i \in \mathfrak{o}$ . 于是,

$$xB = (\sum \xi_i f_i)B = \sum (\xi_i f_i)B = \sum \xi_i (f_i B) = \sum \xi_i g_i.$$

故  $B$  完全由它施于  $\mathfrak{A}$  的生成元素  $f_i$  的结果所决定。其次要讲的是：因为  $\delta_i f_i = 0$ ，故  $\delta_i g_i = \delta_i(f_i B) = (\delta_i f_i) B = 0$ 。所以，如果  $(\varepsilon_i)$  是  $g_i$  的阶理想，则  $\varepsilon_i | \delta_i$ 。

反过来，设对于每个  $i$ ， $g_i$  是  $\mathfrak{A}$  的一个元素，它的阶理想  $(\varepsilon_i)$  适合条件  $\varepsilon_i | \delta_i$ 。定义  $B$  是映照  $\sum \xi_i f_i \rightarrow \sum \xi_i g_i$ ，则可断言  $B \in \mathfrak{B}$ 。我们先证  $B$  是单值的。这因为，假设  $\sum \xi_i f_i = \sum \eta_i f_i$  是同一个元素的两种表示，则  $\sum (\xi_i - \eta_i) f_i = 0$ 。故  $\delta_i | (\xi_i - \eta_i)$ 。于是， $\varepsilon_i | (\xi_i - \eta_i)$ ，并且这可推得  $\sum (\xi_i - \eta_i) g_i = 0$ ，或  $\sum \xi_i g_i = \sum \eta_i g_i$ 。这就证明：由两种表示所得的结果相等。故  $B$  是一个  $\sigma$ -自同态立可验证了。

我们的结果如次：元素  $B \in \mathfrak{B}$  与元素  $g_i$  的有序集合  $(g_1, g_2, \dots, g_t)$  之间存在有一个 1—1 对应，这里  $g_i$  的阶理想  $(\varepsilon_i)$  适合条件  $\varepsilon_i | \delta_i$ 。今命  $g_i = \sum \beta_{ij} f_j$ ， $\beta_{ij} \in \mathfrak{o}$ ，并且把元素  $\in \mathfrak{o}$  的环  $\mathfrak{o}_t$  里的  $t \times t$  阵

$$(46) \quad (\beta) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1t} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{t1} & \beta_{t2} & \cdots & \beta_{tt} \end{bmatrix}$$

与有序集合  $(g_1, g_2, \dots, g_t)$  联系起来。这个阵不是唯一决定的。这因为，任意的  $\beta_{ij}$  可用  $\beta'_{ij}$  来代替，这里  $\beta'_{ij} \equiv \beta_{ij} \pmod{\delta_j}$ ，这是不改变  $g_i$  所能做的仅有改变。故我们可说， $(\beta)$  的  $j$ -列的元素在以  $\delta_j$  为模数下是确定的。条件  $\varepsilon_i | \delta_i$  亦即条件  $\delta_i g_i = 0$  与方程

$$(47) \quad \delta_i \beta_{ij} \equiv 0 \pmod{\delta_j}$$

等价。因为(47)的意义是说：存在着  $\gamma_{ij}$  使  $\delta_i \beta_{ij} = \gamma_{ij} \delta_j$ ，所以(47)与下面关于(46)的阵  $(\beta)$  的条件等价：存在着一个阵  $(\gamma)$  使

$$(48) \quad \begin{bmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1t} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{t1} & \beta_{t2} & \cdots & \beta_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1t} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{t1} & \gamma_{t2} & \cdots & \gamma_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_t \end{bmatrix}.$$

适合这个条件的阵  $(\beta)$  的全体  $\mathfrak{M}$  是阵环  $\mathfrak{o}_t$  的子环。阵  $(\beta)$

决定  $\mathfrak{B}$  的一个元素使  $f_i B = \sum \beta_{ij} f_j$ . 我們容易验证: 对应  $(\beta) \rightarrow B$  是  $\mathfrak{M}$  与  $\mathfrak{B}$  之間的一个同态. 但由  $(\beta)$  所决定的自同态  $B$  是 0 必須而且只須  $\beta_{ij} \equiv 0 \pmod{\delta_j}$ . 所以同态核是陣  $(v)$  的集合  $\mathfrak{N}$ , 而  $(v)$  的元素  $v_{ij}$  是积  $\mu_{ij} \delta_j$ . 故  $B \in \mathfrak{N}$  必須而且只須在  $\mathfrak{o}_i$  里存在有一个  $(\mu)$  使

$$(4) \quad (v) = (\mu)(\delta),$$

这里  $(\delta) = \text{diag} \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t\}$ . 环  $\mathfrak{B}$  与差环  $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$  同构.

**定理 18.** 令  $\mathfrak{N} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \dots \oplus \{f_t\}$ , 这里  $f_i$  的階理想是  $(\delta_i)$ , 则  $\mathfrak{N}$  的  $\mathfrak{o}$ - 自同态的环  $\mathfrak{B}$  与差环  $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$  同构, 这里  $\mathfrak{M}$  是由陣  $(\beta)$  构成的  $\mathfrak{o}_t$  的子环, 对于  $(\beta)$  有一个  $(\gamma)$  存在使 (48) 成立, 而  $\mathfrak{N}$  是由陣  $(v)$  构成的理想, 对于  $(v)$  有一个  $(\mu)$  存在使 (49) 成立.

如果使用关于  $\delta$  的条件 (45), 则  $\mathfrak{M}$  的陣可明白决定. 今列举 (47) 的下列情形:

1.  $i \geq j$ . 此时  $\delta_i \equiv 0 \pmod{\delta_j}$ . 所以这些  $\beta_{ij}$  是任意的.
2.  $i \leq u, j > u$ . 此时由 (47) 与 (45) 可推得这些  $\beta_{ij} = 0$ .
3.  $i, j > u$ . 此时  $\delta_i = \delta_j = 0$ , 而  $\beta_{ij}$  是任意的.
4.  $i < i \leq u$ . 此时令  $\eta_{ij} = \delta_i^{-1} \delta_j$ , 则 (47) 与条件  $\beta_{ij} \equiv 0 \pmod{\eta_{ij}}$  等价.

故  $(\beta)$  有下面形状:

$$(50) \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1u} & & \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2u} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \beta_{u1} & \beta_{u2} & \cdots & \beta_{uu} & & \\ \hline \beta_{u+1,1} & \beta_{u+1,2} & \cdots & \beta_{u+1,u} & \beta_{u+1,u+1} & \cdots \beta_{u+1,t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{t1} & \beta_{t2} & \cdots & \beta_{tu} & \beta_{t,u+1} & \cdots \beta_{tt} \end{array} \right)$$

这里除了在左上角陣块里主对角綫上方的元素外, 其余所有  $\beta$  都是任意的: 此时  $\beta_{ij} = \mu_{ij} \eta_{ij}$ , 这里  $\mu_{ij}$  是任意的, 而  $\eta_{ij} = \delta_i^{-1} \delta_j$ . 关于这些  $\beta$ , 条件  $\beta_{ij} \equiv 0 \pmod{\delta_j}$  与  $\mu_{ij} \equiv 0 \pmod{\delta_i}$  等价.

**17. 与給定的綫性变換可交換的綫性变換** 今把  $\mathfrak{R}$  特殊化, 取为由綫性变換  $A$  所决定的  $\Phi[\lambda]$ -模. 此时, 每个  $\delta_i \neq 0$ , 故  $u = t$ . 环  $\mathfrak{M}$  由所有陣  $(\beta)$  組成, 而在  $(\beta)$  里如果  $i \geq j$ , 則  $\beta_{ij}$  是任意元素; 但在  $i < j$  时則  $\beta_{ij} = \mu_{ij}\eta_{ij}$ , 而  $\eta_{ij} = \delta_i^{-1}\delta_j$ . 任意一个  $\beta_{ij}$  都可以用同一陪集  $(\text{mod } \delta_j)$  里的  $\beta'_{ij}$  代替. 故  $\mu_{ij}$  可以用同一陪集  $(\text{mod } \delta_i)$  里的  $\mu'_{ij}$  代替. 于是, 如果  $n_i = \deg \delta_i$ , 則可設

$$i \geq j \text{ 时 } \deg \beta_{ij} < n_j,$$

$$i < j \text{ 时 } \deg \mu_{ij} < n_i.$$

$\mathfrak{M}$  里适合这些条件的陣叫做 **正規化陣**. 显然两个正規化陣能决定  $\mathfrak{o}$ -自同态环  $\mathfrak{B}$  里的同一  $B$  必須而且只須它們是全同的. 所以上面决定的对应  $(\beta) \rightarrow B$  是正規化陣集合  $\mathfrak{U}$  与环  $\mathfrak{B}$  之間的 1-1 对应.

我們知道,  $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{U} = \Phi_t[A] \supseteq \Phi_t$ ; 故  $\mathfrak{B}$  是  $\Phi$  上向量空間  $\mathfrak{E}$  的一个子空間. 今將計算  $\Phi$  上向量空間  $\mathfrak{B}$  的維数.

首先要講的是: 与純量乘法对应的正規化陣是  $t$  行及  $t$  列的純量陣  $\alpha 1 = \text{diag} \{\alpha, \alpha, \dots, \alpha\}$ , 这因为我們有关系  $f_i \alpha_i = \alpha f_i$ . 再則正規化陣的集合  $\mathfrak{U}$  在加法及用純量陣作乘法下显然是封閉的. 故  $\mathfrak{U}$  可看作是  $\Phi$  上一个向量空間. 此时对于  $(\beta) \in \mathfrak{U}$ , 定义  $\alpha(\beta)$  为陣  $\alpha 1(\beta)$ . 如果  $B_i \in \mathfrak{B} (i = 1, 2)$ , 而  $B_i \rightarrow (\beta_i) \in \mathfrak{U}$ , 則显然有  $B_1 + B_2 \rightarrow (\beta_1) + (\beta_2)$  及  $\alpha B_1 \rightarrow \alpha(\beta_1)$ . 因为这个对应是 1-1 的, 这証明了  $\Phi$  上空間  $\mathfrak{B}$  与  $\Phi$  上空間  $\mathfrak{U}$  等价. 今决定  $\mathfrak{U}$  的維数.

令  $\mathfrak{U}_{ij}$  表示滿足  $(k, l) \neq (i, j)$  則  $\beta_{kl} = 0$  的所有正規化陣構成的集合,  $\mathfrak{U}_{ij}$  是空間  $\mathfrak{U}$  的子空間. 我們易知, 如果  $i \geq j$ , 則次数  $< n_j$  的多項式空間的維数  $\dim \mathfrak{U}_{ij}$  是  $n_j$ . 同理, 如果  $i < j$ , 則  $\dim \mathfrak{U}_{ij} = n_i$ . 因为  $\mathfrak{U}$  是子空間  $\mathfrak{U}_{ij}$  的直接和,

$$\dim \mathfrak{U} = \sum_{j=1}^t (t-j+1)n_j + \sum_{i=1}^{t-1} (t-i)n_i = \sum_{j=1}^t (2t-2j+1)n_j.$$

这証明了下面的定理.

**定理 19.** (福路本紐斯). 令  $(\alpha) \in \Phi_n$ , 并令  $\delta_1(\lambda), \delta_2(\lambda), \dots,$

$\delta_i(\lambda)$  是  $\lambda 1 - (\alpha)$  里  $\neq 1$  的不變因子. 如果  $\delta_i(\lambda)$  的次數是  $n_i$ , 則与  $(\alpha)$  可交換的綫性无關障的最大个数是

$$N = \sum_{j=1}^t (2t - 2j + 1)n_j.$$

如果  $t > 1$ , 則显然  $N > \sum_{j=1}^t n_j = n > n_t$ . 因为  $\Phi_t$  上向量空間  $\mathfrak{N} = \Phi_t[A]$  的維数是  $n_t$ , 这証明了: 在此种情形下  $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{N}$ . 如果回忆到  $t = 1$  是  $A$  为循环变换的条件, 則得下面关于定理 17 的系的逆定理.

**系.** 如果  $A$  是一个非循环的綫性变换, 則存在有不是  $A$  的多項式, 而能与  $A$  交換的綫性变换.

**例 令**

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

此时, 如果  $A$  是对应的綫性变换, 則  $\mathfrak{N} = \{f_1\} \oplus \{f_2\}$ . 不变因子是  $\delta_1 = \lambda - 1$  及  $\delta_2 = (\lambda - 1)^2$ . 正规化陣  $(\beta)$  的一般形状是

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12}(\lambda - 1) \\ \beta_{21} & \beta_{22} + \beta'_{22}\lambda \end{bmatrix}.$$

因为  $\lambda f_1 = f_1$ , 及  $\lambda^2 f_2 = (2\lambda - 1)f_2 = -f_2 + 2(\lambda f_2)$ ,

$$f_1 B = \beta_{11}f_1 - \beta_{12}f_2 + \beta_{12}(\lambda f_2),$$

$$f_2 B = \beta_{21}f_1 + \beta_{22}f_2 + \beta'_{22}(\lambda f_2),$$

$$(\lambda f_2) B = \beta_{21}f_1 - \beta'_{22}f_2 + (\beta_{22} + 2\beta'_{22})(\lambda f_2).$$

所以, 与  $(\alpha)$  可交換的陣的一般形状是

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & -\beta_{12} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta'_{22} \\ \beta_{21} & -\beta_{22} & \beta_{22} + 2\beta'_{22} \end{bmatrix}.$$

### 習 題 30

1. 令  $\mathfrak{N}$  是一个有限交換羣, 并設  $\mathfrak{N}$  是  $n_1, n_2, \dots, n_t$  阶的循环羣的直接和, 这里  $i \leq j$  时  $n_i | n_j$ . 証明:  $\mathfrak{N}$  的自同态环里元素的个数是

$$N = \prod_{j=1}^t n_j^{2t-2j+1}.$$

2. 决定与

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

可交換的陣。

3. 決定與

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

可交換的陣。

**18. 環  $\mathfrak{B}$  的心** 今就  $\mathfrak{R}$  是一個有限生成的  $\mathfrak{o}$ -模來考慮，這裡  $\mathfrak{o}$  是主理想整區。與前一樣，令  $\mathfrak{R} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \cdots \oplus \{f_t\}$ ，這裡階理想  $(\delta_i)$  適合 (45)。今証下面的定理。

**定理 20.**  $\mathfrak{R}$  的  $\mathfrak{o}$ -自同態環的心由純量乘法組成。

令  $\mathfrak{B}$  是  $\mathfrak{o}$ -自同態環， $\mathfrak{C}$  是它的心，而  $\mathfrak{o}_l$  是純量乘法  $x \rightarrow \alpha x$  的環。我們已知  $\mathfrak{o}_l \subseteq \mathfrak{C}$ 。今令  $C$  是  $\mathfrak{C}$  的任意元素。令  $E_k (k = 1, 2, \cdots, t)$  是  $\mathfrak{o}$ -自同態，使  $f_i E_k = \delta_{ik} f_k (i = 1, 2, \cdots, t)$ 。由 § 16 的論述知，這樣的自同態在  $\mathfrak{B}$  里存在。還存在有使  $f_i E_{ik} = \delta_{ij} f_k$  的  $\mathfrak{o}$ -自同態  $E_{ik}$ 。因為  $C$  與這些自同態可交換，故得下面的方程：

$$f_i C = (f_i E_i) C = (f_i C) E_i = \gamma f_i, \quad \gamma \in \sigma,$$

$$f_k C = (f_i E_{ik}) C = (f_i C) E_{ik} = (\gamma f_i) E_{ik} = \gamma (f_i E_{ik}) = \gamma f_k.$$

故  $C$  與映照  $x \rightarrow \gamma x$  重合。所以  $\mathfrak{C} = \mathfrak{o}_l$ 。

如果  $C$  是  $\mathfrak{R}$  里可與  $\mathfrak{B}$  的每個元素交換的任意自同態，則  $C$  特別可與  $\mathfrak{o}_l$  的每個元素交換。故  $C \in \mathfrak{B}$ 。於是  $C$  在  $\mathfrak{B}$  的心里。逆定理是顯然的。這個說明使我們能夠把定理 20 用下面另一種形式述出：

**定理 20'.**  $\mathfrak{R}$  里能與每個  $\mathfrak{o}$ -自同態交換的僅有自同態是純量乘法。

這定理可特殊化為

**系 1.** 如果  $C$  是一個綫性變換，它與每個能夠與  $A$  可交換的綫性變換都可交換，則  $C$  是含  $A$  的一個多項式。

這個系使我們能夠決定整個綫性變換環  $\mathfrak{L}$  的心。這因為，令  $A = 1$ ，則與  $A$  可交換的綫性變換的環  $\mathfrak{B}$  是整個環  $\mathfrak{L}$ 。於是，系 1 指出：與每個綫性變換可交換的僅有綫性變換是含 1 的多項

式，因为綫性变换能够用含 1 的多項式表达必須而且只須它是純量乘法，这就給出重要的

**系 2.** 域  $\Phi$  上向量空間的綫性變換的環的心是純量乘法的集合  $\Phi I$ .

这个結果的更直接的証明見后面第八章，§ 2.

### 習 題 31

1. 証明：有限羣的自同态环的心是由自同态  $x \rightarrow mx$  組成，这里  $m$  是一个整数。
2. 証明：綫性变换  $A$  是循环的必須而且只須与  $A$  可交換的綫性变换的环  $\mathfrak{B}$  是交換环。
3. 証明下面关于定理 20' 的推广： $\mathfrak{A}$  里与每个同势的  $\mathfrak{a}$ -自同态可交換的自同态只能是純量乘法。

## 第 四 章

### 綫性變換的集合

我們將在這一章里引進某些一般概念，它們在研究任意綫性變換集合中是基本概念，深入的討論應該屬於所謂環表示論，不在本書範圍內；但引進這些概念的大意會使本章的結果得到更好的了解。我們還能夠把這些結果中一部分推廣到可交換的綫性變換的集合。

**1. 不變子空間** 本章里大部分是論述關於除環  $\Delta$  上向量空間的一般情形，令  $\mathfrak{R}$  是  $\Delta$  上有限維向量空間，並且令  $\mathcal{Q}$  是  $\Delta$  上空間  $\mathfrak{R}$  里的綫性變換的一個集合。如果  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的一個基，而  $A \in \mathcal{Q}$ ，則  $e_i A = \sum \alpha_{ij} e_j$ ，而  $(\alpha)$  是  $A$  關於給定的基的陣。由  $A \in \mathcal{Q}$  按這樣方法決定的陣  $(\alpha)$  構成一個集合  $\omega$ ，叫做  $\mathcal{Q}$  關於  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的陣集合。如果  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  是另一個基，而  $f_i = \sum \mu_{ij} e_j$ ，則  $\mathcal{Q}$  關於這個新基的陣集合是集合  $\{(\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}\}$ ，這裡  $(\alpha) \in \omega$ 。這個集合記作  $(\mu)\omega(\mu)^{-1}$ 。

從幾何觀點來說，綫性變換集合的研究里一個基本問題是決定關於這個集合的不變子空間問題。也象在單一綫性變換情形，如果  $\mathfrak{S}$  是子空間，而對於每個  $A \in \mathcal{Q}$  有  $\mathfrak{S}A \subseteq \mathfrak{S}$ ，則  $\mathfrak{S}$  叫做在  $\mathcal{Q}$  下不變。如果  $\mathcal{Q}$  由一個單一綫性變換構成，則循環子空間  $\{x\}$  就是不變子空間的例子。下面是其它簡單的例子。

1.  $\mathcal{Q}$  由綫性變換  $0$  組成。因為對於任意的  $\mathfrak{S}$ ， $\mathfrak{S}0 = 0 \subseteq \mathfrak{S}$ ，所以此時任意一個子空間都是不變的。

2.  $\mathcal{Q}$  是整個綫性變換集合  $\mathfrak{L}$ 。此時零空間  $0$  及全空間  $\mathfrak{R}$  是仅有的不變子空間。令  $\mathfrak{S}$  是非零不變子空間，並令  $y$  是  $\mathfrak{S}$  里非零向量。如果  $x$  是  $\mathfrak{R}$  里任意向量，則有一個綫性變換  $A$  存在使



$yA = x$ , 因为  $\mathfrak{S}$  是不变的, 故  $x = yA \in \mathfrak{S}A \subseteq \mathfrak{S}$ . 于是,  $x \in \mathfrak{S}$ ; 但因为  $x$  是任意的, 故  $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$ .

全空间  $\mathfrak{R}$  关于任意集合  $\Omega$  显然是一个不变子空间. 因为对于任意线性变换  $A$  有  $0A = 0$ , 故零空间  $0$  是不变子空间. 上面第二个例指出: 有集合  $\Omega$  存在使这两个“当然”子空间对于  $\Omega$  是仅有的不变子空间. 这样的集合叫做一个不可约集合. 为着方便, 有时也说:  $\mathfrak{R}$  是关于集合  $\Omega$  不可约的.

可约性, 或真的 ( $\neq 0, \neq \mathfrak{R}$ ) 不变子空间的存在可以用  $\Omega$  的阵集合的一个简单条件来说明. 设  $\mathfrak{S}$  是一个真不变子空间, 并令  $(f_1, f_2, \dots, f_r)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基, 使  $(f_1, f_2, \dots, f_r)$  是  $\mathfrak{S}$  的一个基. 因为  $\mathfrak{S}$  是不变的, 故对于每个  $A \in \Omega$ ,  $f_i A \in \mathfrak{S} (i = 1, 2, \dots, r)$ . 于是, 给出  $A$  关于  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  的关系是

$$(1) \quad \begin{aligned} f_i A &= \sum_{j=1}^r \beta_{ij} f_j \quad (i = 1, 2, \dots, r) \\ f_k A &= \sum_{l=1}^n \beta_{kl} f_l \quad (k = r+1, r+2, \dots, n), \end{aligned}$$

所以  $A$  的阵  $(\beta)$  的形状是

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \cdots & \beta_{rr} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{r+1,1} & \beta_{r+1,2} & \cdots & \beta_{r+1,r} & \beta_{r+1,r+1} & \beta_{r+1,r+2} & \cdots & \beta_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nr} & \beta_{n,r+1} & \beta_{n,r+2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

一个阵有一个  $r \times (n-r)$  阵块元素全为 0 的在右上角时, 这样的阵称为有既约形式. 所以, 一个真不变子空间的存在可推知有一个基存在, 对于这个基,  $\Omega$  的阵都有既约形式. 另一种的说明是: 如果  $\omega$  是  $\Omega$  关于某个基  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的阵集合, 则真不变子空间的存在可推知: 存在有一个满秩阵  $(\mu)$  使  $(\mu)\omega(\mu)^{-1}$  的所有阵有相同的既约形式 (亦即全体有同一的  $r$ ).

逆定理也是成立的。这因为, 設  $(\mu)\omega(\mu)^{-1}$  的所有陣具既約形式(2)。如果  $f_i = \sum \mu_{ij} e_j$ , 則  $\Omega$  关于  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  的陣組成集合  $(\mu)\omega(\mu)^{-1}$ 。由于这些陣的形状知关系(1)成立, 并且这些关系指出空間  $\Theta = [f_1, f_2, \dots, f_r]$  在  $\Omega$  下不变。

習 題 32

1. 令  $\Omega$  是一个綫性变换集合, 并令  $B$  是与每个  $A \in \Omega$  可交换的一个綫性变换。証明: 如果  $\Theta$  是关于  $\Omega$  的不变子空間, 則  $\Theta B$  也是不变的。証明: 使  $yB = 0$  的向量  $y \in \Theta$  的丁集合  $\Re$  关于  $\Omega$  也是不变的。
2. 証明: 一个子空間  $\Theta$  关于一个集合  $\Omega$  是不变的必須而且只須下面的算子条件成立: 对于到  $\Theta$  上的每个射影  $E$  及每个  $A \in \Omega$ , 关系  $EAE = EA$  成立。

**2. 誘导綫性变换** 如果  $\Theta$  是一个子空間, 在  $\Omega$  下不变, 則綫性变换  $A \in \Omega$  在  $\Theta$  里誘导出变换。显然这些变换都是綫性的。今將証明: 在一定意义下,  $A \in \Omega$  在商空間  $\bar{\Re} = \Re/\Theta$  里也誘导出綫性变换。我們知道,  $\bar{\Re}$  的向量  $\bar{x}$  是由形状如  $x + \Theta$  的向量組成的一个陪集, 这里  $x$  是固定的, 而  $y$  遍历  $\Theta$ 。如果  $A \in \Omega$ , 則  $(x + y)A = xA + yA = xA + y'$ , 这里  $y' = yA \in \Theta$ 。所以, 陪集  $\bar{x}$  里任意向量的象是由  $xA$  决定的陪集  $\overline{xA}$  里一个向量。故联系  $\bar{x}$  与  $\bar{\Re}$  里向量  $\overline{xA}$  的映照  $\bar{A}$  是单值的。我們把  $\bar{A}$  叫做  $A$  在  $\bar{\Re}$  里誘导出的变换。因为

$$\begin{aligned} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\bar{A} &= \overline{(x_1 + x_2)A} = \overline{((x_1 + x_2)A)} \\ &= \overline{(x_1A + x_2A)} = \overline{(x_1A)} + \overline{(x_2A)} = \bar{x}_1\bar{A} + \bar{x}_2\bar{A}, \end{aligned}$$

及

$$(\alpha\bar{x})\bar{A} = \overline{(\alpha x)A} = \overline{(\alpha(xA))} = \overline{\alpha(\overline{xA})} = \alpha(\bar{x}\bar{A}),$$

所以, 这个映照是綫性的。在沒有混淆的危險时, 为着簡單起見, 我們也用  $A$  表示  $A$  的誘导变换。

另一方面, 有时需要小心地在变换  $A$  与  $\bar{A}$  之間加以区别。它們之間的精确关系可按下面方法使之明确。

考虑  $\Re$  到  $\bar{\Re}$  上的映照  $P: x \rightarrow x = x + \Theta$ 。由  $\bar{\Re}$  里合成的定义立知:  $P$  是  $\Re$  到  $\bar{\Re}$  上的一个綫性变换。我們叫  $P$  做  $\Re$  到  $\bar{\Re}$  上的自然映照。現在, 我們定义  $\bar{A}$  为  $\bar{x}\bar{A} = \overline{xA}$ , 則有关系  $P\bar{A} = AP$  結合  $A$  与  $\bar{A}$ 。

設按前节方法选取基  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  使  $(f_1, f_2, \dots, f_r)$  是  $\mathfrak{S}$  的一个基, 則由(1)里第一組关系显然知, 陣

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1r} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \cdots & \beta_{rr} \end{bmatrix}$$

是  $A$  在不变子空間  $\mathfrak{S}$  里誘導出的綫性变换的陣. 再則, 由(1)里第二組方程得

$$\bar{f}_k \bar{A} = \overline{(f_k A)} = \left( \sum_1^n \overline{\beta_{kl} f_l} \right) = \sum_1^n \beta_{kl} \bar{f}_l = \sum_{r+1}^n \beta_{kl} \bar{f}_l.$$

今知向量  $(\bar{f}_{r+1}, \bar{f}_{r+2}, \dots, \bar{f}_n)$  构成  $\bar{\mathfrak{R}}$  的一个基, 故这些关系指出:  $\bar{A}$  关于这个基的陣是(2)里右下角上的陣块

$$\begin{bmatrix} \beta_{r+1, r+1} & \cdots & \beta_{r+1, n} \\ \beta_{r+2, r+1} & \cdots & \beta_{r+2, n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n, r+1} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix}.$$

至此, 我們对于出現在(2)里的两个对角綫上陣块得到了解释. 我們自然要問出現在(2)里的左下角那个余下的陣块的意义. 要获得这一个陣块的意义, 首先注意到  $[f_{r+1}, \dots, f_n]$  是空間  $\mathfrak{S}$  的余空間  $\mathfrak{U}$ . 分解  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{U}$  决定  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{S}$  上的一个射影  $E$ . 因为  $\mathfrak{S}$  关于  $\Omega$  是不变的, 故对于每个  $A \in \Omega$ ,  $EAE = EA$  成立(习题 32 的第 2 題). 今考虑綫性变换  $AE - EA = AE - EAE$ ; 这个变换把  $\mathfrak{R}$  映到  $\mathfrak{S}$  內. 再則, 如果  $y \in \mathfrak{S}$ ,  $y(AE - EA) = yA - yA = 0$ . 由此可見  $AE - EA$  决定  $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{S}$  到  $\mathfrak{S}$  內的一个綫性变换  $A_E$ . 故定义

$$\bar{x} A_E = x(AE - EA),$$

而由上面的說明可見  $A_E$  是单值的. 我們直接驗証:  $A_E$  是  $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$  到  $\mathfrak{S}$  內的一个綫性变换. 由定义我們还得关系  $AE - EA = PA_E$ .

今將証明: 陣

$$\begin{bmatrix} \beta_{r+1,1} & \cdots & \beta_{r+1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n,1} & \cdots & \beta_{n,r} \end{bmatrix}$$

是  $A_E$  关于  $\mathfrak{R}$  的基  $(\bar{f}_{r+1}, \cdots, \bar{f}_n)$  及  $\mathfrak{S}$  的基  $(f_1, \cdots, f_r)$  的陣. 故得关系

$$\begin{aligned} \bar{f}_k A_E &= f_k (AE - EA) = f_k AE \\ &= \sum_{i=1}^r \beta_{ki} f_i \quad (k = r+1, \cdots, n), \end{aligned}$$

这证明了我們的論断.

### 習 題 33

1. 証明: 象  $A + B = C$  或  $AB = C$  ( $A, B, C \in \mathcal{Q}$ ) 的关系可推出  $\mathfrak{R}$  里关于誘导綫性变换的对应关系  $\bar{A} + \bar{B} = \bar{C}$ , 或  $\bar{A}\bar{B} = \bar{C}$ .

2. 証明:  $A$  在  $\mathfrak{R}$  里是 1—1 的必須而且只須  $A$  在  $\mathfrak{S}$  里是 1—1 的, 并且  $A$  在  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}/\mathfrak{S}$  里是 1—1 的.

**3. 合成空間列** 令  $\mathfrak{S}$  与  $\mathfrak{U}$  是不变子空間, 适合  $\mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{U} \supseteq \mathfrak{S}$ , 則  $\bar{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}/\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}/\mathfrak{S}$  的一个子空間. 如果  $\bar{u} \in \bar{\mathfrak{U}}$ , 則  $\bar{u} = u + \mathfrak{S}$ , 这里  $u \in \mathfrak{U}$ . 于是, 对于  $\mathcal{Q}$  里任意的  $A$  有  $\bar{u}\bar{A} = \overline{uA} \in \bar{\mathfrak{U}}$ . 这証明:  $\bar{\mathfrak{U}}$  关于  $\mathfrak{R}$  里誘导綫性变换  $\bar{A}$  的集合  $\bar{\mathcal{Q}}$  是不变的.

今將証逆定理也成立, 亦即  $\mathfrak{R}$  的任意不变子空間的形状是  $\bar{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}/\mathfrak{S}$ , 这里  $\mathfrak{U}$  是  $\mathfrak{R}$  里含有  $\mathfrak{S}$  的一个不变子空間. 故令  $\bar{\mathfrak{U}}$  是  $\mathfrak{R}$  里关于  $\bar{\mathcal{Q}}$  不变子空間, 令  $\mathfrak{U}$  是含在属于  $\bar{\mathfrak{U}}$  的各陪集里向量的全体. 如果  $u_1$  与  $u_2 \in \mathfrak{U}$ , 則  $\bar{u}_1 = u_1 + \mathfrak{S}$  与  $\bar{u}_2 = u_2 + \mathfrak{S}$  都  $\in \bar{\mathfrak{U}}$ . 于是,  $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = (u_1 + u_2) + \mathfrak{S} \in \bar{\mathfrak{U}}$ . 故  $u_1 + u_2 \in \mathfrak{U}$ . 同理, 当任意  $\alpha \in \Delta$  及任意  $u \in \mathfrak{U}$  时, 有  $\alpha u \in \mathfrak{U}$ . 因为  $(u + \mathfrak{S})\bar{A} = uA + \mathfrak{S} \in \bar{\mathfrak{U}}$ , 故  $uA \in \mathfrak{U}$ . 于是,  $\mathfrak{U}$  是  $\mathfrak{R}$  的一个不变子空間. 显然,  $\bar{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}/\mathfrak{S}$ .

設有适合

$$(3) \quad 0 \subset \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{S}_r = \mathfrak{R}$$

的一个不变子空間序列, 如果每个  $\mathfrak{S}_i$  是  $\mathfrak{S}_{i-1}$  上不可約, 就是說,  $\mathfrak{S}_i$  与  $\mathfrak{S}_{i-1}$  間不存在适合  $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}' \supset \mathfrak{S}_{i-1}$  的不变子空間  $\mathfrak{S}'$ , 則这个序列叫做  $\mathfrak{R}$  关于  $\mathcal{Q}$  的合成空間列. 由已証的結果显見,  $\mathfrak{S}_i$  是  $\mathfrak{S}_{i-1}$  上不可約的必須而且只須  $\mathfrak{S}_i/\mathfrak{S}_{i-1}$  关于由  $A \in \mathcal{Q}$  誘导的綫性

变换集合是不可约的, 不可约空间

$$(4) \quad \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2/\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_i/\mathfrak{S}_{i-1}$$

叫做合成空间列(3)的合成因子.

今选取  $\mathfrak{S}_1$  的一个基  $(f_1, f_2, \dots, f_{n_1})$ . 则它可扩充为  $\mathfrak{S}_2$  的一个基  $(f_1, f_2, \dots, f_{n_1+n_2})$ ; 这样继续下去, 最后得  $\mathfrak{R}$  的一个基  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  使  $(f_1, f_2, \dots, f_{n_1+n_2+\dots+n_i})$  是  $\mathfrak{S}_i$  的一个基. 如果  $A \in \mathcal{Q}$ , 则

$$(5) \quad \begin{aligned} f_i A &= \sum_1^{n_1} \beta_{ij} f_j \quad (i = 1, 2, \dots, n_1), \\ f_k A &= \sum_1^{n_1+n_2} \beta_{kj} f_j \quad (k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2), \\ &\dots\dots\dots \\ f_p A &= \sum_1^{n_1+n_2+\dots+n_i} \beta_{pq} f_q \quad (p = n_1 + \dots + n_{i-1} + 1, \\ &\dots, n_1 + n_2 + \dots + n_i = n). \end{aligned}$$

故  $A$  关于这个基的阵的形状是

$$(6) \quad \begin{bmatrix} (\beta_1) & & & 0 \\ * & (\beta_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & * & \dots & (\beta_i) \end{bmatrix},$$

这里在主对角线上方的各“阵块”都是0. 陪集  $(\bar{f}_{n_1+\dots+n_{i-1}+1}, \bar{f}_{n_1+\dots+n_{i-1}+2}, \dots, \bar{f}_{n_1+\dots+n_i})$  构成商空间  $\mathfrak{S}_i/\mathfrak{S}_{i-1}$  的一个基, 并且如果  $\bar{A}$  表示  $A$  在商空间  $\mathfrak{S}_i/\mathfrak{S}_{i-1}$  里所诱导的变换, 则由(5)得

$$\bar{f}_r \bar{A} = \sum_{n_1+\dots+n_{i-1}+1}^{n_1+\dots+n_i} \beta_{rs} \bar{f}_s$$

所以  $\bar{A}$  关于这个基的阵是由出现于(6)里的对角阵块  $(\beta_i)$ . 对于  $\mathfrak{S}_i$  是  $\mathfrak{S}_{i-1}$  上不可约的这一假定就意味着: 要找一个阵  $(\mu_i)$  使所有阵  $(\mu_i)(\beta_i)(\mu_i)^{-1}$  都具相同的既约形式是不可能的.

对于任意集合  $\mathcal{Q}$  要证合成空间列的存在是不难的, 首先, 如果  $\mathfrak{R}$  是不可约的, 则  $0 \subset \mathfrak{R}$  就是这样的一个合成空间列. 否则, 令  $\mathfrak{S}$

是一个真不变子空间；如果  $\mathfrak{S}$  关于诱导的线性变换的集合是不可约的，则取  $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}$ ，否则，令  $\mathfrak{S}'$  是  $\mathfrak{S}$  的一个真不变子空间，则  $\dim \mathfrak{R} > \dim \mathfrak{S} > \dim \mathfrak{S}'$ ，所以，这个方法不能无限制地继续进行下去，最终一定得到一个不可约的不变子空间  $\mathfrak{S}_1 \neq 0$ ，对于  $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{S}_1$  及诱导变换的集合  $\bar{Q}$  重复这个论证；可见，如果  $\bar{\mathfrak{R}} \neq 0$ （亦即  $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{S}_1$ ），则  $\bar{\mathfrak{R}}$  含有一个不可约的不变子空间  $\mathfrak{S}_2 \neq 0$ ，这个空间的形状为  $\mathfrak{S}_2/\mathfrak{S}_1$ ，而  $\mathfrak{S}_2$  关于  $Q$  是不变的，并且是  $\mathfrak{S}_1$  上不可约的，次考虑  $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}_2$ ，如果这个空间  $\neq 0$ ，则由同样方法可得，关于  $Q$  不变的子空间  $\mathfrak{S}_3$  是  $\mathfrak{S}_2$  上不可约的，因为  $\dim \mathfrak{S}_1 < \dim \mathfrak{S}_2 < \dim \mathfrak{S}_3 < \cdots$ ，这个方法进行到譬如说  $s$  阶段，就要达到  $\mathfrak{R}$  而终止，于是， $0 \subset \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{S}_s = \mathfrak{R}$  是一个合成空间列。

**4. 线性变换集合的可分解性** 设  $\mathfrak{R}_i$  是关于  $Q$  不变的子空间，今考虑空间  $\mathfrak{R}$  分解为子空间  $\mathfrak{R}_i$  的直接和

$$(7) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_s.$$

如果每个  $\mathfrak{R}_i \neq 0$ ，并且  $s > 1$ ，则这样的分解叫做真分解。如果  $\mathfrak{R}$  有一个真分解，我们说  $\mathfrak{R}$  是关于  $Q$  可分解的，而说  $Q$  是线性变换的一个可分解集合。

一个线性变换集合是不可约时，显然是不可分解的，但另一方面也存在着可约而不可分解的集合，所以，可分解性的条件比可约性的条件更强，今用例来证明这个论断。

**例** 令  $Q$  由线性变换  $A$  构成， $A$  关于基  $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$  的阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

则  $e_1 A = 0$ ，而  $i > 1$  时  $e_i A = e_{i-1}$ ，所以，子空间  $\mathfrak{S}_i = [e_1, e_2, \cdots, e_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 是不变子空间，今将证明：只有这些子空间是关于  $A$  的非零不变子空间，这因为，令  $\mathfrak{S}$  是这样的一个子空间，令  $h$  是能使  $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}_h$  的最小正整数，则  $\mathfrak{S}$  含有向量

$$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \cdots + \gamma_h e_h,$$

这里  $\gamma_h \neq 0$ ，我们可假定  $\gamma_h = 1$ ，于是

$$y = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \cdots + \gamma_{h-1} e_{h-1} + e_h \in \mathfrak{S}.$$

故向量

$$\begin{aligned} y_1 A &= \gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_{h-1} c_{h-2} + c_{h-1} \\ y_2 A &= \gamma_2 c_1 + \cdots + \gamma_{h-1} c_{h-1} + c_{h-2} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

都  $\in \mathfrak{S}$ . 显然  $c_1, c_2, \cdots, c_h$  与这些向量线性相关, 因此  $\mathfrak{S}_h \subseteq \mathfrak{S}$ ; 从而  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_h$ . 如果  $i < j$ , 则因为  $\mathfrak{S}_i \subset \mathfrak{S}_j$ , 显然这些空间中没有一个是无交的. 所以,  $\mathfrak{R}$  不能写为这些不变子空间的直接和.

如果  $\mathfrak{R}$  是不变子空间  $\mathfrak{R}_i (i = 1, 2, \cdots, s; s \geq 1)$  的直接和, 则可选  $\mathfrak{R}$  的一个基  $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$  使

$$(8) \quad (f_{n_1+1}, \cdots, f_{n_1+n_2+1}, f_{n_1+n_2+2}, \cdots, f_{n_1+\cdots+n_i})$$

是  $\mathfrak{R}_i$  的一个基. 因为  $\mathfrak{R}_i$  是不变的, (8) 里任意向量通过任意  $A \in Q$  变为这些向量的线性组合, 所以  $A$  的阵的形状是

$$(9) \quad \begin{bmatrix} (\beta_1) & & & \\ & (\beta_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\beta_s) \end{bmatrix}.$$

这里对角阵块是  $A$  在  $\mathfrak{R}_i$  里的诱导变换关于基(8)的阵. 反过来, 如果  $Q$  是任意的线性变换集合, 并且有一个基  $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$  存在使  $Q$  里变换关于这个基的阵的形状是(9), 则  $\mathfrak{R}$  是不变子空间

$$\mathfrak{R}_i = [f_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1}, \cdots, f_{n_1+\cdots+n_i}]$$

的直接和.

今设  $E_i (i = 1, 2, \cdots, s)$  是由这样分解所决定的射影. 如果

$$(10) \quad x = x_1 + x_2 + \cdots + x_s,$$

这里  $x_i \in \mathfrak{R}_i$ , 则知  $E_i$  是映照  $x \rightarrow x_i$ . 我们还知道 (第二章, § 13) 下列关系成立:

$$(11) \quad E_i^2 = E_i, \quad E_i E_j = 0 (i \neq j), \quad E_1 + E_2 + \cdots + E_s = 1.$$

空间  $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R} E_i$ , 所以每个  $E_i \neq 0$ . 今令  $A \in Q$ , 则

$$x A = x_1 A + x_2 A + \cdots + x_s A,$$

并且因为  $\mathfrak{R}_i$  是不变子空间, 故  $x_i A \in \mathfrak{R}_i$ . 所以,  $x A$  在  $\mathfrak{R}_i$  里的分量是  $x_i A$ , 或

$$(12) \quad x A E_i = x_i A = x E_i A.$$

这证明: 射影  $E_i$  与每个  $A \in Q$  可交换. 反过来, 设  $E_i$  是适合(11)

的非零綫性变换,并且与每个  $A \in Q$  可交换,則知  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_s$ , 这里  $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}E_i$ . 如果  $A \in Q$ , 而  $x_i \in \mathfrak{R}_i$ , 則还有  $x_i = xE_i$  及  $x_iA = xE_iA = (xA)E_i \in \mathfrak{R}_i$ . 所以,  $\mathfrak{R}_i$  关于  $Q$  是不变子空間.

如果在討論里  $s > 1$ , 則每个  $\mathfrak{R}_i$  是一个真子空間, 并且每个  $E_i \neq 1$ . 故知, 如果  $Q$  是綫性变换的可分解集合, 則存在有射影  $\neq 0, \neq 1$ , 而与  $Q$  里每个  $A$  可交换. 反过来, 如果  $E_1$  是射影  $\neq 0, \neq 1$ , 而与  $Q$  里每个  $A$  可交换, 則  $E_2 = 1 - E_1$  也有这些性質. 再則,  $E_1$  与  $E_2$  是正交的, 所以  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}E_1 \oplus \mathfrak{R}E_2$  及  $\mathfrak{R}E_i$  是真不变子空間. 这就証明了下面重要的判断准則:

**定理 1.** 一个綫性变换集合  $Q$  是可分解的, 必須而且只須存在有射影  $E \neq 0, \neq 1$ , 而与  $Q$  里每个变换可交换.

### 习 題 34

1. 証明: 如果  $\mathfrak{R}$  关于  $Q$  的一个子集合是不可約的(不可分解的), 則它关于  $Q$  是不可約的(不可分解的). 应用这个結果証明: 与三角陣

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

的集合对应的綫性变换集合是一个不可分解集合.

**5. 完全可約性** 如果  $\mathfrak{S}_1$  与  $\mathfrak{S}_2$  是  $Q$  下不变子空間, 則  $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$  与  $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$  也是  $Q$  下不变子空間. 所以, 不变子空間的全体是  $\mathfrak{R}$  的子空間的完全格  $L$  的一个子格  $L_Q$ . 在討論集合  $L_Q$  时自然可应用格論上的观念; 事实上, 前此討論中就是这样做. 故  $Q$  是不可約的等于說  $L_Q$  只含有两个元素.  $Q$  是不可分解的說法也可写成格  $L_Q$  的性質. 在第一章列出的  $L$  的性質里, 鏈条件及狄得京法則在子格  $L_Q$  里显然保持有效; 但  $L$  的相余性質在  $L_Q$  里不一定成立. 如果  $Q$  只由恆等变换 1 构成, 此时  $L_Q = L$ , 則这个性質在  $L_Q$  里就一定成立. 如果  $Q$  是不可約的, 則  $L_Q$  也是有余格; 并且后面还会遇見其它不很平凡的例子.

如果  $L_Q$  是有余格, 我們說  $Q$  是綫性变换的完全可約集合. 这



自然意味着：如果  $\mathfrak{S}$  是关于  $\Omega$  的任意不变子空间，则有使  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{S}'$  的另一个不变子空间  $\mathfrak{S}'$  存在，因为这个条件可使用于每个不变子空间  $\mathfrak{S}$ 。所以规避它倒不如承认它为佳。故可注意的是，这些(可能是无限的)条件的集合可以下面给出的单一条件来代替。

**定理 2.** 一个线性变换集合  $\Omega$  是完全可约的必须而且只须  $\mathfrak{R}$  可写成关于  $\Omega$  不变的与不可约的子空间  $\mathfrak{R}_i$  的直接和。

**证 充分性.** 令  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_k$ ，这里  $\mathfrak{R}_i$  是不可约的不变子空间。如果  $\mathfrak{S}$  是任意不变子空间，则或者  $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$ ，或者存在有一个  $\mathfrak{R}_i$ ，譬如  $\mathfrak{R}_1$ ，使  $\mathfrak{R}_1 \not\subseteq \mathfrak{S}$ 。于是，令  $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S} + \mathfrak{R}_1$ ，今  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}_1 \in L_\Omega$ ，并且因为  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}_1$  含于不可约的不变子空间  $\mathfrak{R}_1$  里，所以或者  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1$ ，或者  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}_1 = 0$ 。因为  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1$  等价于  $\mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{R}_1$ ，故必有  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R}_1 = 0$ 。于是， $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S} + \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{R}_1$ 。今以  $\mathfrak{S}_1$  代替  $\mathfrak{S}$  而重复上面论证，则或者  $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}$ ，此时  $\mathfrak{R}_1$  是  $\mathfrak{S}$  的一个余空间，或者有一个  $\mathfrak{R}_i$  存在，譬如  $\mathfrak{R}_2$ ，使  $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{R}_2$ ；则  $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2$ 。最后在记法的适宜选取下得  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_k$ 。于是， $\mathfrak{S}' = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_k$  是  $\mathfrak{R}$  里  $\mathfrak{S}$  的一个余空间。

**必要性.** 设  $\mathfrak{R}_1$  是  $\mathfrak{R}$  的一个不可约的不变子空间，则或者  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1$  是不可约的，或者  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}'_1$ ，这里  $\mathfrak{R}'_1$  是一个非零不变子空间。次令  $\mathfrak{R}_2$  是  $\mathfrak{R}'_1$  的一个不可约的不变子空间。如果  $\mathfrak{R}'_1 = \mathfrak{R}_2$ ，则有  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2$ ，这里  $\mathfrak{R}_i$  便是所求的不可约的不变子空间，否则， $\mathfrak{R}'_1 + \mathfrak{R}_2$  有一个余空间  $\mathfrak{R}'_2$ ，这里  $\mathfrak{R}'_2$  是不变子空间。于是， $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \mathfrak{R}'_2$ 。然后对于  $\mathfrak{R}'_2$  重复上面论证，最后就引到  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_k$ ，这里  $\mathfrak{R}_i$  是不可约的不变子空间。

### 习 题 35

1. 使用定理 2 的前半论证，证明：如果  $\mathfrak{R}$  是不可约的不变子空间  $\mathfrak{R}_i$  的和(不须是直接和)，则  $\mathfrak{R}$  关于  $\Omega$  是完全可约的。
2. 证明：如果  $\omega$  是对角阵的任意集合，则线性变换的对应集合  $\Omega$  是完全可约的。
3. 令  $G = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$  是线性变换的一个有限集，亦即  $\Delta$  上  $\mathfrak{R}$  的 1—1 线性变换集的一个子集。设  $G$  的阶  $m$  不能为  $\Delta$  的特征数所除尽。证明：如果  $\mathfrak{S}$  是关

于  $G$  的一个不变子空间, 而  $E$  是到  $\mathfrak{G}$  上的一个射影, 则  $E_0 = \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^m S_i E S_i^{-1} \right)$  是  $\mathfrak{G}$  上一个射影, 它与  $S_i$  可交换. 于是, 证明下面的重要定理:

如果线性变换的任意有限幂的阶不能为除环的特征数所除尽, 则这个群是完全可约的.

4. 令  $\Omega$  是线性变换的一个任意集合, 并令  $E$  是任意射影, 它对于  $\Omega$  里每个  $A$  使  $EA = EAE$  成立. 仿 § 2, 定义  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}/\mathfrak{R}E$  到  $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}E$  内的线性变换  $A_E$  为  $EA_E = x(AE - EA)$ . 证明: 如果存在有  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{G}$  内的线性变换  $D$  使  $A_E = AD - DA$  对于所有  $A$  成立, 则  $\mathfrak{G}$  有一个余不变子空间.

5. 证明: 如果  $\Omega$  是完全可约的, 并且  $\mathfrak{G}$  是不变子空间, 则在  $\mathfrak{G}$  里诱导的线性变换集合是完全可约的.

**\*6. 与算子群论及模论的关系** 这里讲述的线性变换集合的理论可看作带算子群 ( $M$ -群) 论<sup>1)</sup> 的一种特殊化. 读者如熟悉带算子群论, 就会看出这里是论述加法群  $\mathfrak{R}$ , 作为带算子集合  $M = \Delta_i \cup \Omega$  的群, 这里  $\Delta_i$  是纯量乘法的集合.  $M$ -子群的概念显然与关于线性变换集合  $\Omega$  的不变子空间的概念重合. 所以, 可约性、可分解性、合成空间列等的概念与关于  $M$ -群  $\mathfrak{R}$  的这些概念重合.

$M$ -群论还提示了引入关于集合  $\Omega$  的不变子空间或商空间之间的同态的下述概念. 如果  $\theta$  是一个线性变换, 而且对于所有诱导变换  $A \in \Omega$ ,  $(xA)\theta = (x\theta)A$  成立, 则映照  $\theta$  说是一个这样空间到另一个空间内的一个  $\Omega$ -线性变换. 同理, 如果存在有  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  的一个 1—1  $\Omega$ -线性变换  $\theta$ , 则说这两个子空间  $\mathfrak{R}_i (i = 1, 2)$  是  $\Omega$ -同构的, 或等价的. 如果  $(e_1, e_2, \dots, e_r)$  是  $\mathfrak{R}_1$  的一个基, 则  $(e_1\theta, e_2\theta, \dots, e_r\theta)$  是  $\mathfrak{R}_2$  的一个基, 并可直接验证: 每个  $A$  关于  $(e_1, e_2, \dots, e_r)$  及关于  $(e_1\theta, e_2\theta, \dots, e_r\theta)$  有相同的阵. 故对于  $\mathfrak{R}_1$  与  $\mathfrak{R}_2$  里任意选择的基, 任意  $A \in \Omega$  的阵  $(\alpha_1)$  与  $(\alpha_2)$  间有  $(\alpha_2) = (\mu)(\alpha_1)(\mu)^{-1}$  联系着, 这里满秩阵  $(\mu)$  与  $A$  无关.

今可述下面两个基本定理, 它们是从  $M$ -群论转来的.

**约当-霍尔定理** 如果  $0 \subset \mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{R}_t = \mathfrak{R}$  与  $0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{G}_u = \mathfrak{R}$  是关于线性变换集合  $\Omega$  的两个合成空间列, 则  $t = u$ , 并且合成因子  $\mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_{i-1}$ ,  $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$  可编成 1—1

1) 参看本书第一卷的第五章及第六章.

对应使各个对应是  $\Omega$ -同構。

**克魯尔-叔密特定理** 如果  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_h = \mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{S}_k$  是  $\mathfrak{R}$  关于  $\Omega$  分解为非零不變的並且不可分解的子空間的两种分解, 則  $h = k$ , 並且如果  $\mathfrak{S}_i$  經適宜編序後,  $\mathfrak{R}_i$  与  $\mathfrak{S}_i$  是  $\Omega$ -同構的。

关于这些定理的証明, 讀者可參看第一卷第五章。

我們还可把当前的理論并入模理論中。这由  $\mathfrak{R}$  是可交換的事實而出現, 于是,  $\mathfrak{R}$  的自同态构成一个环, 而集合  $M = \Delta \cup \Omega$  产生  $\mathfrak{R}$  的自同态环的一个子环  $\mathfrak{o}(M)$ 。  $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}(M)$  叫做  $M$  的封裹环。如果  $\mathfrak{S}$  是加法羣  $\mathfrak{R}$  的一个子羣, 則  $\mathfrak{R}$  里把  $\mathfrak{S}$  映到自身內的自同态集合是自同态环的一个子环。所以, 如果  $\mathfrak{S}$  是一个  $\Omega$ -子空間, 則这个子环含有  $M$ , 从而它也含有  $\mathfrak{o}(M)$ 。故知,  $\mathfrak{R}$  的任意  $\Omega$ -子空間是一个  $\mathfrak{o}(M)$ -子羣。逆定理显然成立。仿此可見: 如果  $\theta$  是一个  $\Omega$ -綫性变换, 則  $\theta$  是一个  $\mathfrak{o}(M)$ -同态; 并且一般說来, 从集合  $M$  变为它的封裹环毋須作什么更改。我們在論述自同态环中, 已經知道把基础的羣看作模常見方便。

要获得封裹环  $\mathfrak{o}(M)$  的結構通常是困难的, 并且遇到这种情形时, 从綫性变换集合的观点改变为模的观点是沒有特殊收获, 如果  $\Delta = \Phi$  是一个域, 則决定  $\mathfrak{o}$  的結構的問題比在一般情形下来得容易。此时, 我們还看到  $\Phi$  含于綫性变换环里, 而  $\mathfrak{o}$  可看作  $\Phi$  上一个代数。因此在这个情形下我們叫它做集合  $\Omega$  的封裹代数。

**7. 单独一个綫性变换的可約性、可分解性、完全可約性** 我們再采用原来观点, 并且在这一节里考虑  $\Omega$  由单独一个綫性变换所构成而  $\Delta = \Phi$  是一个域的这个特殊情形。

如果  $f$  是  $\mathfrak{R}$  里一个非零向量, 則循环子空間  $\{f\}$  是一个非零的不變子空間。令  $\mu_f(\lambda)$  是  $f$  的指导多項式, 并且設  $\mu_f(\lambda) = \pi(\lambda)\nu(\lambda)$ , 这里  $\pi(\lambda)$  是不可約的, 并且有正的次数与以 1 为首項系数。則  $g = f\nu(A)$  有指导多項式  $\pi(\lambda)$ 。故  $\mathfrak{R}$  含有一个向量, 它的指导多項式是素多項式。今設  $A$  是不可約的; 此时我們有  $\mathfrak{R} = \{g\}$ , 这里  $\mu_g(\lambda) = \pi(\lambda)$  是一个素多項式。反过来, 設  $\mathfrak{R}$  有

这种形状,并且令  $\mathfrak{G}$  在  $A$  下是非零不变子空间. 如果  $h$  是  $\mathfrak{G}$  里一个向量, 则指导多项式  $\mu_h(\lambda)$  是  $\pi(\lambda)$  的一个因子. 所以, 如果  $h \neq 0$ , 则  $\mu_h(\lambda) = \pi(\lambda)$ . 于是,  $\dim \{h\} = \deg \pi(\lambda) = \dim \{g\}$ . 故知  $\{h\} = \{g\}$ . 因此证明了下面的定理.

**定理 3.**  $\Phi$  上空间  $\mathfrak{R}$  里一个线性变换  $A$  是不可约的必须而且只须它是循环的并有素多项式为最低多项式.

次考虑单独一个线性变换的可分解性问题. 我们知道,  $\mathfrak{R} = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \cdots \oplus \{f_t\}$ . 所以, 不可分解性的必要条件是  $t = 1$ , 亦即  $\mathfrak{R} = \{f\}$  是循环空间. 我们还知道, 如果循环线性变换的最低多项式可写成  $\mu_1(\lambda)\mu_2(\lambda)$ , 而  $(\mu_1(\lambda), \mu_2(\lambda)) = 1$ , 则  $\mathfrak{R} = \{g_1\} \oplus \{g_2\}$ , 这里  $\mu_{g_i}(\lambda) = \mu_i(\lambda)$ . 于是, 循环线性变换是可分解的, 除非它的最低多项式的形状为  $\pi(\lambda)^k$ , 而  $\pi(\lambda)$  是素多项式. 反过来, 这些条件是充分的; 这因为, 设  $A$  是循环的, 而以  $\pi(\lambda)^k$  为它的最低多项式. 设  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2$ , 这里  $\mathfrak{R}_i$  关于  $A$  是不变子空间. 令  $\mu_i(\lambda)$  是  $A$  在  $\mathfrak{R}_i$  里诱导的变换的最低多项式. 因为对于  $\mathfrak{R}_i$  里所有  $x_i$  有  $x_i \pi(A)^k = 0$ , 故  $\mu_i(\lambda) \mid \pi(\lambda)^k$ . 于是,  $\mu_i(\lambda) = \pi(\lambda)^{k_i}$  ( $k_i \leq k$ ). 但对于  $\mathfrak{R}_i$  里所有  $x_i$ ,  $x_i \pi(A)^{k_i} = 0$ , 故这可推得: 如果  $\bar{k} = \max(k_1, k_2)$ , 则  $\pi(A)^{\bar{k}} = 0$ . 故  $\bar{k} = k$ , 因此可设  $k_1 = k$ . 这意味着  $A$  在  $\mathfrak{R}_1$  里的最低多项式是  $\pi(\lambda)^k$ . 于是,  $\mathfrak{R}_1$  里有一个向量  $f_1$  存在, 它的指导多项式是  $\pi(\lambda)^k$ . 故  $\dim \{f_1\} = \deg \pi(\lambda)^k = \dim \mathfrak{R}$ . 所以,  $\{f_1\} = \mathfrak{R}$ ; 又因为  $\{f_1\} \subseteq \mathfrak{R}_1$ , 所以  $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}$ . 故分解法  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2$  就不恰当.

**定理 4.**  $\Phi$  上空间  $\mathfrak{R}$  里线性变换  $A$  是不可分解的必须而且只须它是循环变换并且它的最低多项式是素多项式的幂.

次设  $A$  是完全可约的, 则  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_r$ , 这里  $\mathfrak{R}_i$  是不变的并且不可约的. 由定理 3 知,  $A$  在  $\mathfrak{R}_i$  里的最低多项式是素多项式  $\pi_i(\lambda)$ . 所以,  $A$  在  $\mathfrak{R}$  里的最低多项式  $\mu(\lambda)$  是  $\pi_i(\lambda)$  的最小公倍式. 于是,  $\mu(\lambda)$  是不同的素多项式的积. 反过来, 令  $A$  是一个线性变换, 它的最低多项式  $\mu(\lambda)$  是不同的素多项式的积, 则每个不变因子也有这种形状. 所以, 初等因子理想的形状是

$(\pi_i(\lambda))$ , 这里  $\pi_i(\lambda)$  是素多項式. 但我們知道, 这可推得  $\mathfrak{R}$  是循环子空間  $\mathfrak{R}_i = \{g_i\}$  的直接和, 这里指导多項式  $\mu_{g_i}(\lambda) = \pi_i(\lambda)$ . 由定理 3 知, 每个  $\mathfrak{R}_i$  是不可約的; 故  $\mathfrak{R}$  是完全可約的. 这証明了下面的定理.

**定理 5.**  $\Phi$  上空間  $\mathfrak{R}$  里一个綫性變換  $A$  是完全可約的必須而且只須它的最低多項式是不同的素多項式的積.

### 習 題 36

1. 令  $A$  是循环綫性變換, 它的最低多項式为  $\mu(\lambda)$ . 証明: 如果  $\mathfrak{S}$  在  $A$  下不变, 則  $\mathfrak{S}$  是一个循环子空間. 証明:  $\mathfrak{R}$  的不变子空間可安排使与  $\mu(\lambda)$  的因子(它們的首項系数  $= 1$ ) 成 1—1 对应.

2. 令  $\Phi$  是无限域, 并令  $\mathfrak{R} = \{f_1\} \oplus \{f_2\}$  是  $\mathfrak{R}$  关于  $A$  的一个分解, 使  $\mu_{f_1}(\lambda) = \mu_{f_2}(\lambda) = \pi(\lambda)$  是一个素多項式, 証明:  $\mathfrak{R}$  在  $A$  下有无数个不变子空間.

3. 証明: 如果  $\Phi$  是无限域, 則关于  $A$  的不变子空間的个数为有限的必須而且只須  $A$  是循环變換.

**8. 空間关于一个綫性變換的准素支空間** 一个向量空間关于一个綫性變換分解成不可分解的子空間的分解法不是唯一决定的. 另一方面, 我們将在本节里指出, 有一种分解法虽然不象分解为不可分解的支空間的分解法那样細致, 但是它却保留有唯一性的主要长处.

令  $\mu(\lambda)$  是  $A$  的最低多項式, 并令

$$(13) \quad \mu(\lambda) = \pi_1(\lambda)^{k_1} \pi_2(\lambda)^{k_2} \cdots \pi_r(\lambda)^{k_r}$$

是  $\mu(\lambda)$  分解为不同的不可約多項式的幕的因子分解, 这里每个多項式的首項系数  $= 1$ . 令  $\mathfrak{R}_i$  是能使

$$(14) \quad x_i \pi_i(A)^{k_i} = 0$$

的  $\mathfrak{R}$  里向量  $x_i$  构成的子空間. 則我們可断言, 空間  $\mathfrak{R}_i$  关于  $A$  是不变的, 并且

$$(15) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_r.$$

$\mathfrak{R}_i$  的不变性是  $\pi_i(A)^{k_i}$  与  $A$  可交換这一事实的直接推論<sup>1)</sup>. (15) 的証明原可由使用前节的结果得出, 但我們將給出一个独立的討

1) 参看习题 32 的第一題.

論,这由于討論的本身具有若干兴趣的緣故,

首先我們注意到多項式

$$\begin{aligned}(16) \quad \mu_i(\lambda) &= \mu(\lambda)/\pi_i(\lambda)^{k_i} \\ &= \pi_1(\lambda)^{k_1} \cdots \pi_{i-1}(\lambda)^{k_{i-1}} \pi_{i+1}(\lambda)^{k_{i+1}} \cdots \pi_s(\lambda)^{k_s} \\ &\quad (i = 1, 2, \cdots, s)\end{aligned}$$

是互素的;所以有多項式  $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda), \cdots, \phi_s(\lambda)$  存在使

$$(17) \quad \phi_1(\lambda)\mu_1(\lambda) + \phi_2(\lambda)\mu_2(\lambda) + \cdots + \phi_s(\lambda)\mu_s(\lambda) = 1.$$

把  $A$  代入这个关系,得

$$(18) \quad \phi_1(A)\mu_1(A) + \phi_2(A)\mu_2(A) + \cdots + \phi_s(A)\mu_s(A) = 1.$$

因为  $i \neq j$  时  $\mu_i(\lambda)\mu_j(\lambda)$  可被  $\mu(\lambda)$  除尽,故

$$\phi_i(A)\mu_i(A)\phi_j(A)\mu_j(A) = 0.$$

令  $E_i = \phi_i(A)\mu_i(A)$ , 則这个关系說明

$$(19) \quad E_i E_j = 0 \quad (i \neq j),$$

并且(18)变成

$$(20) \quad E_1 + E_2 + \cdots + E_s = 1.$$

如果以  $E_i$  乘这个关系,并使用(19),得

$$(21) \quad E_i^2 = E_i.$$

故  $E_i$  是正交射影,它們的和等于1,因此

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}E_1 \oplus \mathfrak{R}E_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}E_s.$$

因为  $E_i$  是含  $A$  的多項式,它們与  $A$  可交換;所以空間  $\mathfrak{R}E_i$  关于  $A$  是不变的. 今將証明:  $\mathfrak{R}E_i$  与使  $x_i\pi_i(A)^{k_i} = 0$  的向量  $x_i$  构成的

空間  $\mathfrak{R}_i$  重合. 首先令  $y_i \in \mathfrak{R}E_i$ , 則  $y_i = uE_i = u\phi_i(A)\mu_i(A)$ . 因为  $\mu_i(\lambda)\pi_i(\lambda)^{k_i} = \mu(\lambda)$ , 这就給出

$$y_i\pi_i(A)^{k_i} = u\phi_i(A)\mu_i(A)\pi_i(A)^{k_i} = u\phi_i(A)\mu(A) = 0.$$

所以,  $y_i \in \mathfrak{R}_i$ . 反过来,令  $x$  是  $\mathfrak{R}_i$  里一个向量,

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_s,$$

其中  $x_j \in \mathfrak{R}E_j$ , 則

$$0 = x\pi_i(A)^{k_i} = x_1\pi_i(A)^{k_i} + x_2\pi_i(A)^{k_i} + \cdots + x_s\pi_i(A)^{k_i},$$

又因为  $x_j\pi_i(A)^{k_i} \in \mathfrak{R}E_j$ , 故每个

$$x_j\pi_i(A)^{k_i} = 0.$$

另一方面,  $x_i \pi_i(A)^{k_i} = 0$ , 并且因为  $i \neq j$  时  $\pi_i(\lambda), \pi_j(\lambda)$  是不相同的, 故可推知,  $j \neq i$  时,  $x_j = 0$ . 于是,  $x = x_i \in \mathfrak{R}E_i$ . 这就完成了  $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}E_i$  的证明.

显然施于  $\mathfrak{R}_i$  的  $A$  的最低多项式的形状是  $\pi_i(\lambda)^{l_i}$ , 这里  $l_i \leq k_i$ . 如果  $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_s$ , 这里  $x_i \in \mathfrak{R}_i$ , 及  $\mu^*(\lambda) = \pi_1(\lambda)^{l_1} \pi_2(\lambda)^{l_2} \cdots \pi_s(\lambda)^{l_s}$ , 则对于所有  $i$  还有  $x_i \mu^*(A) = 0$ . 于是,  $x \mu^*(A) = 0$  而  $\mu^*(A) = 0$ . 所以,  $\mu(\lambda) | \mu^*(\lambda)$ . 这显然可推得  $\mu(\lambda) = \mu^*(\lambda)$  及  $l_i = k_i$  ( $i = 1, 2, \cdots, s$ ). 这就完成了下面定理的证明.

**定理6.** 令  $\mu(\lambda)$  是  $\Phi$  上空间  $\mathfrak{R}$  里线性变换  $A$  的最低多项式, 并且令 (13) 是  $\mu(\lambda)$  分解为素多项式的幂的因子分解. 如果  $\mathfrak{R}_i$  定义为能使  $x_i \pi_i(A)^{k_i} = 0$  的向量  $x_i$  构成的子空间, 则

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_s,$$

并且  $A$  在  $\mathfrak{R}_i$  里的诱导变换的最低多项式是  $\pi_i(\lambda)^{k_i}$ .

空间  $\mathfrak{R}_i$  叫做  $\mathfrak{R}$  关于  $A$  的准素支空间. 由分解 (15) 决定的射影  $E_i$  叫做  $A$  的主同势元素.

今专就  $\Phi$  是代数闭域的情形来讨论. 此时,  $\pi_i(\lambda)$  是一次式, 命  $\pi_i(\lambda) = \lambda - \rho_i$ . 令

$$N_i = (A - \rho_i 1)E_i,$$

则

$$\begin{aligned} (22) \quad A &= AE_1 + AE_2 + \cdots + AE_s \\ &= (\rho_1 E_1 + N_1) + (\rho_2 E_2 + N_2) + \cdots + (\rho_s E_s + N_s). \end{aligned}$$

显然, 如果  $i \neq j$ , 则

$$(23) \quad N_i N_j = 0, \quad E_i N_j = 0 = N_j E_i,$$

并且

$$(24) \quad E_i N_i = N_i = N_i E_i.$$

还有  $N_i^{k_i} = (A - \rho_i 1)^{k_i} E_i = E_i (A - \rho_i 1)^{k_i}$ ; 并且, 如果  $x$  是任意向量, 则  $x E_i \in \mathfrak{R}_i$ . 再则  $x_i (A - \rho_i 1)^{k_i} = 0$ . 这证明了

$$(25) \quad N_i^{k_i} = 0.$$

无势线性变换  $N_i$  叫做  $A$  的主无势元素. 这些线性变换与  $E_i$  相

似,也是含  $A$  的多項式.

### 習 題 37

1. 令  $\Phi$  是代数闭域, 它的特征数是 0, 并設  $E_i, N_i (i = 1, 2, \dots, r)$  分別是  $A$  的主同势元素及主无势元素, 并設  $A = \sum (\rho_i E_i + N_i)$ . 如果  $\phi(\lambda)$  是一个多項式, 証明:

$$\phi(A) = \sum \left[ \phi(\rho_i) E_i + \frac{\phi'(\rho_i)}{1!} N_i + \frac{\phi''(\rho_i)}{2!} N_i^2 + \dots + \frac{\phi^{(k_i-1)}(\rho_i)}{(k_i-1)!} N_i^{k_i-1} \right].$$

**9. 交換綫性变换的集合** 今設  $\Omega$  是  $\Phi$  上空間  $\mathfrak{R}$  里交換綫性变换的集合. 首先, 假定  $\Omega$  是不可分解的, 我們將証  $\Omega$  里任意  $A$  的最低多項式是素多項式的冪. 这因为, 否則我們可得  $\mathfrak{R}$  的一个真分解如  $\mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_r$ , 这里  $\mathfrak{R}_i$  是关于  $A$  的准素支空間. 显然, 如果  $B$  是与  $A$  可交換的一个綫性变换, 則  $\mathfrak{R}_i B \subseteq \mathfrak{R}_i$ . 所以,  $\mathfrak{R}_i$  关于  $\Omega$  是不变的, 而这就与  $\Omega$  的不可分解性矛盾了.

次設  $\mathfrak{R}$  是不可約的, 則可断言: 每个  $A$  的最低多項式是不可約的. 这因为, 如果  $\pi(\lambda)$  是  $\mu(\lambda)$  的一个不可約因子, 則使  $y\pi(A) = 0$  的向量  $y$  构成的空間  $\Theta \neq 0$ . 显然,  $\Theta$  关于  $\Omega$  是不变的, 所以  $\Theta = \mathfrak{R}$ , 而  $\pi(\lambda) = \mu(\lambda)$ .

今令  $\Omega$  是交換綫性变换的任意集合, 我們先分解  $\mathfrak{R}$  为

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \oplus \mathfrak{R}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}^{(h)},$$

这里  $\mathfrak{R}^{(i)}$  是不可分解的. 显然, 由  $A \in \Omega$  在任意不变子空間里的誘导变换与在任意商空間里的誘导变换是可交換的. 这特別对于  $\mathfrak{R}^{(i)}$  是成立的. 所以, 由不可分解情形所得的結果指出: 施于  $\mathfrak{R}^{(i)}$  里的任意  $A$  的最低多項式是素多項式的冪  $\pi_i(\lambda)^{k_i}$ . 今对于每个  $\mathfrak{R}^{(i)}$  选取一个合成空間列

$$(26) \quad 0 \subset \mathfrak{R}_1^{(i)} \subset \mathfrak{R}_2^{(i)} \subset \dots \subset \mathfrak{R}_i^{(i)} = \mathfrak{R}^{(i)},$$

則每个商空間  $\mathfrak{R}_i^{(i)} / \mathfrak{R}_{i-1}^{(i)}$  关于誘导变换是不可約的. 所以,  $A$  在  $\mathfrak{R}_i^{(i)} / \mathfrak{R}_{i-1}^{(i)}$  里的誘导变换  $\bar{A}$  的最低多項式是不可約的. 另一方面,  $\pi_i(\bar{A})^{k_i} = 0$ . 所以,  $\bar{A}$  的最低多項式是  $\pi_i(A)$ .

今对应于(26)选择  $\mathfrak{R}^{(i)}$  的一个基, 亦即先取作为  $\mathfrak{R}_i^{(i)}$  的基的一組向量, 次把它补充而得  $\mathfrak{R}_i^{(i)}$  的一个基, 余仿此类推. 对于不



同的  $\mathfrak{R}^{(i)}$  这样决定的基构成  $\mathfrak{R}$  的一个基. 对于这个基,  $A$  的陣的形状为

$$(27) \quad \begin{bmatrix} (\alpha_1) & & & \\ & (\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\alpha_s) \end{bmatrix},$$

这里与  $\mathfrak{R}^{(i)}$  相伴的陣块  $(\alpha_i)$  的形状为

$$(28) \quad \begin{bmatrix} (\beta_1) & & 0 \\ & (\beta_2) & \\ & & \ddots \\ * & & & (\beta_{r_i}) \end{bmatrix}.$$

陣  $(\beta_i)$  是誘導綫性变換  $\bar{A}$  的陣. 所以, 它的最低多項式是  $\pi_i(\lambda)$ .

今設  $\Phi$  是代數閉域, 則  $\pi_i(\lambda) = \lambda - \rho_i$ . 所以,  $\bar{A} = \rho_i 1$  是  $\mathfrak{R}^{(i)}/\mathfrak{R}^{(i)}_1$  里一个純量乘法. 因为任意子空間关于純量乘法是不变的, 所以  $\mathfrak{R}^{(i)}/\mathfrak{R}^{(i)}_1$  是一維空間. 于是, 陣  $(\beta_i)$  都是一阶方陣. 故最后結果可述成下面关于陣的定理:

**定理 7.** 令  $\Phi$  是代數閉域, 並令  $\omega$  是屬於  $\Phi_n$  的交換陣的集合, 則  $\Phi_n$  里有一个滿秩陣  $(\mu)$  存在, 使对于所有  $(\alpha)$  有

$$(\mu)(\alpha)(\mu)^{-1} = \begin{bmatrix} (\alpha_1) & & & \\ & (\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\alpha_s) \end{bmatrix},$$

这里

$$(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \rho_i & & 0 \\ & \rho_i & \\ & & \ddots \\ * & & & \rho_i \end{bmatrix}.$$

### 習 題 38

1. 令  $\Phi$  是复数域, 并且令

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

驗證  $(\alpha)(\beta) = (\beta)(\alpha)$ , 并用这一对陣解釋定理 7.

2. (印格拉罕 Ingraham) 令  $A$  是陣塊形状的一个陣

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix},$$

这里  $A_{ij}$  是元素在代数閉域里的  $r \times r$  陣. 設  $A_{ij}$  可互相交換, 并定义

$$\det_R A = \sum \pm A_{1i_1} A_{2i_2} \cdots A_{mi_m},$$

这里是对  $1, 2, \cdots, m$  的所有排列  $i_1, i_2, \cdots, i_m$  求和, 并按排列是偶的或奇的而分別取符号  $+$  或  $-$ . 使用定理 7 証明下面的行列式传递性质:

$$\det(\det_R A) = \det A.$$

(这对于任意基域成立. 參看第七章的 § 9).

3. (叔尔 Schur) 証明: 在  $\Phi_n$  里能够选取綫性无关的交換陣的最大个数是

$\left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$ , 这里  $[a]$  按慣例表示实数  $a$  里的最大整数.

## 第 五 章

### 双 綫 性 形 式

本章专研究函数的某些类型,叫做双綫性的,它們是就向量对  $(x, y')$  来定义,这里  $x$  是左向量空間  $\mathfrak{R}$  里的向量,而  $y'$  是右向量空間  $\mathfrak{R}'$  里的向量. 假定  $g(x, y')$  的值属于  $\Delta$ , 并且假定一个变向量固定时所得另一个变向量的函数  $g_x(y') = g(x, y')$  及  $g_{y'}(x) = g(x, y')$  都是綫性的. 其中最饒趣味的是非退化双綫性形式. 它們决定  $\mathfrak{R}'$  到  $\mathfrak{R}$  的綫性函数空間上的 1—1 綫性变換. 所以,如果  $A$  是  $\mathfrak{R}$  里一个綫性变換,則在  $\mathfrak{R}'$  里有一个折轉綫性变換伴随它.

如果除环  $\Delta$  有一个反自同构,則  $\Delta$  上任意左向量空間  $\mathfrak{R}$  也可看作  $\Delta$  上一个右向量空間. 所以,此时就有可能定义連結一个空間与它自身的双綫性形式;这样形式叫做純量积. 它們的研究等价于陣的某种等价类型叫做同步性的研究. 純量积的最重要类型是厄米特(Hermite), 对称及交錯純量积. 我們將要找出这样形式的典型陣, 并且在与初等几何有关系的某些特殊情形給出同步性問題的完全解答. 我們还証明关于厄米特形式的威特(Witt)定理, 并且应用它来定义特征数  $\neq 2$  的任意除环上这样形式的符号差的概念.

**1. 双綫性形式** 如果  $\mathfrak{R}$  是  $\Delta$  上(左)向量空間, 我們曾定义綫性函数为使

$$(1) \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(ax) = af(x)$$

的一个映照  $x \rightarrow f(x) \in \Delta$ . 这些映照关于合成

$$(2) \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fa)(x) = f(x)a$$

构成一个右向量空間  $\mathfrak{R}^*$ . 我們已知, 这些定义可推得: 对于每个固定向量  $x \in \mathfrak{R}$ , 映照  $f \rightarrow x(f) \equiv f(x)$  是  $\mathfrak{R}^*$  里一个綫性函数. 由

于这种对称性使我们把  $f(x) = x(f)$  看作一对  $x \in \mathfrak{R}$  与  $f \in \mathfrak{R}^*$  的函数。所以,用  $s(x, f)$  来表示值  $f(x)$ ; 于是上面的方程就变为

$$(3) \quad s(x + y, f) = s(x, f) + s(y, f), \quad s(\alpha x, f) = \alpha s(x, f),$$

$$(4) \quad s(x, f + g) = s(x, f) + s(x, g), \quad s(x, f\alpha) = s(x, f)\alpha.$$

今由假定  $\mathfrak{R}'$  是  $\Delta$  上任意右向量空间而使这情况一般化, 于是, 如果对于所有向量对  $(x, y')$  (这里  $x \in \mathfrak{R}, y' \in \mathfrak{R}'$ ) 定义的函数  $g(x, y')$ , 它的值  $g(x, y') \in \Delta$ , 并且适合

$$(5) \quad g(x_1 + x_2, y') = g(x_1, y') + g(x_2, y'), \quad g(\alpha x, y') = \alpha g(x, y'),$$

$$(6) \quad g(x, y'_1 + y'_2) = g(x, y'_1) + g(x, y'_2), \quad g(x, y'\alpha) = g(x, y')\alpha,$$

则这个函数叫做双綫性形式。显然  $s(x, f)$  是对于空间  $\mathfrak{R}$  与它的共轭空间  $\mathfrak{R}^*$  的一个双綫性形式。

我们在另一方面要証: 共轭空间  $\mathfrak{R}^*$  可用以给出双綫性形式的别样定义。先令  $g(x, y')$  是連結左向量空间  $\mathfrak{R}$  与右向量空间  $\mathfrak{R}'$  的一个双綫性形式。把向量  $y'$  固定, 而把  $g(x, y')$  看作  $x$  的函数。因此記  $g(x, y') = g_{y'}(x)$ 。于是, 由(5)知  $g_{y'}(x)$  是綫性函数, 亦即它属于共轭空间  $\mathfrak{R}^*$ 。至此, 让  $y'$  变, 而考察映照  $y' \rightarrow g_{y'} \in \mathfrak{R}^*$ 。以  $R$  表示这个映照; 由(6)知

$$g_{y'_1 + y'_2}(x) = g(x, y'_1 + y'_2) = g(x, y'_1) + g(x, y'_2) = g_{y'_1}(x) + g_{y'_2}(x),$$

$$g_{y'\alpha}(x) = g(x, y'\alpha) = g(x, y')\alpha = g_{y'}(x)\alpha,$$

故  $R$  是綫性的。同理, 如果固定  $x$ , 则函数  $g_x(y') = g(x, y')$  是  $y'$  的綫性函数。所以,  $g_x$  是在  $\mathfrak{R}'$  的共轭空间  $(\mathfrak{R}')^*$  里, 映照  $L: x \rightarrow g_x$  是  $\mathfrak{R}$  到  $(\mathfrak{R}')^*$  里的一个綫性变换。

反过来, 設给出右向量空间  $\mathfrak{R}'$  到  $\mathfrak{R}$  的綫性函数空间  $\mathfrak{R}^*$  内的一个綫性变换  $R: y' \rightarrow g_{y'}(x)$ , 则可把  $g_{y'}(x)$  看作  $(x, y')$  的一个函数  $g(x, y')$ , 这里  $x \in \mathfrak{R}, y' \in \mathfrak{R}'$ ; 并且可验证这个函数是一个双綫性形式。故知, 关于双綫性形式的概念的一个等价定义是从右向量空间  $\mathfrak{R}'$  到  $\mathfrak{R}$  的共轭空间  $\mathfrak{R}^*$  内的綫性变换的概念。同理, 我們还可說: 一个双綫性形式是  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{R}'$  的共轭空间  $(\mathfrak{R}')^*$  内的一个綫性变换。但, 原来的定义在当前具体表示上有对称性的长处, 故此最后还是沿用它。

### 習 題 39

1. 証明:如果  $g(x, y')$  是一个双綫性形式, 而  $A$  是  $\mathfrak{R}$  里一个綫性变换, 則  $g(xA, y')$  是一个双綫性形式.

2. 双綫性形式的陣 今設  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{R}'$  是有限維向量空間, 而  $(e_1, e_2, \dots, e_n), (f'_1, f'_2, \dots, f'_{n'})$  順序是这两个空間的基, 則陣

$$(7) \quad \begin{bmatrix} g(e_1, f'_1) & g(e_1, f'_2) & \dots & g(e_1, f'_{n'}) \\ g(e_2, f'_1) & g(e_2, f'_2) & \dots & g(e_2, f'_{n'}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(e_n, f'_1) & g(e_n, f'_2) & \dots & g(e_n, f'_{n'}) \end{bmatrix}$$

叫做双綫性形式  $g$  关于給定的基的陣. 双綫性形式  $g$  完全由这个陣决定; 这因为, 如果  $x$  及  $y'$  是  $\mathfrak{R}$  及  $\mathfrak{R}'$  里任意向量, 則可写

$$x = \sum_1^n \xi_i e_i, y' = \sum_1^{n'} \eta_j f'_j, \text{ 而得}$$

$$g(x, y') = g(\sum \xi_i e_i, \sum \eta_j f'_j) = \sum \xi_i g(e_i, f'_j) \eta_j.$$

所以,  $g(x, y')$  可由  $x$  与  $y'$  的表示式及由(7)的元素  $g(e_i, f'_j)$  而知道. 我們还明白, 如果  $(\beta_{ij})$  是元素在  $\Delta$  里的任意  $n \times n'$  陣, 則存在有一个双綫性形式  $h(x, y')$ , 它以这个陣作为它关于  $(e_1, e_2, \dots, e_n), (f'_1, f'_2, \dots, f'_{n'})$  的陣, 这因为, 我們可定义

$$g(x, y') = \sum \xi_i \beta_{ij} \eta_j.$$

并且容易驗証这个函数是双綫性的. 因为  $g(e_i, f'_j) = \beta_{ij}$ , 所以  $g$  的陣是給定的陣.

今述在两个空間里的基改变时  $g(x, y')$  的陣  $(\beta)$  所受的影响. 令  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  是  $\mathfrak{R}$  里第二个基,  $u_i = \sum \mu_{ij} e_j$ , 这里  $(\mu) \in L(\Delta, n)$ , 并令  $(v'_1, v'_2, \dots, v'_{n'})$  是  $\mathfrak{R}'$  里第二个基,  $v'_k = \sum f'_{jk} v_j$ ,  $(v) \in L(\Delta, n')$ , 則

$$g(u_i, v'_k) = g(\sum \mu_{ij} e_j, \sum f'_{jk} v_j) = \sum \mu_{ij} \beta_{jk} v_{ik},$$

所以新陣是与  $(\beta)$  等价的陣  $(\mu)(\beta)(v)$ . 我們要注意到在交換环情形下这个关系通常以稍微不同的形状出現. 此时, 一般把所有向量空間作为左向量空間来考虑. 于是,  $\mathfrak{R}'$  里基的改变是  $v'_k = \sum v_{ki} f'_i$ ,

而双綫性形式的新陣是  $(\mu)(\beta)(\nu)'$ , 这里  $(\nu)'$  是陣  $(\nu) = (\nu_{kl})$  的折轉陣.

今再就任意的  $\Delta$  这个一般情形來說, 在綫性变换論里曾証<sup>1)</sup>得: 如果  $(\beta)$  是任意矩陣, 它的元素在  $\Delta$  里, 則有滿秩方陣  $(\mu)$  及  $(\nu)$  存在使

$$(8) \quad (\mu)(\beta)(\nu) = \text{diag}\{1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0\}.$$

陣方面的这个結果导出关于双綫性形式的下面基本定理:

**定理 1.** 如果  $g(x, y')$  是結連向量空間  $\mathfrak{R}$  及  $\mathfrak{R}'$  的一个双綫性形式, 則这两个空間里有基  $(u_1, u_2, \cdots, u_n), (v'_1, v'_2, \cdots, v'_{n'})$  存在使

$$(9) \quad \begin{aligned} g(u_i, v'_j) &= \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, r), \\ g(u_i, v'_j) &= 0 \quad (i > r \text{ 或 } j > r). \end{aligned}$$

显然  $r$  是  $g(x, y')$  的陣  $(\beta)$  的(行或列)秩. 这个  $r$  的抽象特性将于下一节給出.

**3. 非退化形式** 如果  $g(x, y')$  是一个双綫性形式, 則对于所有  $y' \in \mathfrak{R}'$  能使  $g(z, y') = 0$  的向量  $z \in \mathfrak{R}$  的全体成一个子空間  $\mathfrak{N}$ , 叫做  $g$  的左根集. 仿此, 我們定义右根集  $\mathfrak{N}'$  是对于所有  $x$  能使  $g(x, z') = 0$  的所有向量  $z'$  組成的  $\mathfrak{R}'$  的子空間. 由定义显見, 左(右)根集恰是  $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}')$  到  $\mathfrak{N}'(\mathfrak{N})$  的共軛空間  $\mathfrak{N}^*(\mathfrak{N}^*)$  內的綫性变换  $L(R)$  的臆空間. 如果  $(f'_1, f'_2, \cdots, f'_{n'})$  是  $\mathfrak{R}'$  的一个基, 而  $z \in \mathfrak{R}$ , 則  $g(z, f'_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n')$ . 从这  $n'$  个方程  $g(z, f'_j) = 0$  可推得  $g(z, x') = 0$  对于所有  $x'$  成立. 所以, 这些条件也是  $z \in \mathfrak{N}$  的充分条件. 今令  $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基, 記  $z = \sum_i \zeta_i e_i$ , 則

$$(10) \quad 0 = g(z, f'_j) = g(\sum \zeta_i e_i, f'_j) = \sum_{i=1}^n \zeta_i \beta_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, n')$$

是  $z = \sum \zeta_i e_i \in \mathfrak{N}$  的条件. 故  $\dim \mathfrak{N}$  是(10)的綫性无关解的最大解数. 所以  $\dim \mathfrak{N} = n - r$ , 这里  $r$  是  $(\beta)$  的秩. 同理可知  $\dim \mathfrak{N}' = n' - r$ . 我們还注意到: 如果使用定理 1 里的正規化基,

1) 見第二章 § 6.

則可見  $\mathfrak{N} = [u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n]$  而  $\mathfrak{N}' = [v'_{r+1}, v'_{r+2}, \dots, v'_{n'}]$ . 这因为,  $i > r$  时显然  $u_i \in \mathfrak{N}$ . 如果  $\sum \gamma_i u_i \in \mathfrak{N}$ , 則特別在  $k \leq r$  时有

$$0 = g(\sum \gamma_i u_i, v'_k) = \gamma_k.$$

所以向量的形状为  $\sum_{i=r+1}^n \gamma_i u_i$ , 因此它属于  $[u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n]$ . 这証明了关于  $\mathfrak{N}$  的論断, 类似的論証可使用于  $\mathfrak{N}'$  而得关于  $\mathfrak{N}'$  的論断.

我們知道,  $\dim \mathfrak{N}L + \dim \mathfrak{N} = n$ , 及  $\dim \mathfrak{N}'R + \dim \mathfrak{N}' = n'$ , 故  $\dim \mathfrak{N}L = r = \dim \mathfrak{N}'R$ .

如果  $\mathfrak{N} = 0, \mathfrak{N}' = 0$ , 則双綫性形式  $g$  說是非退化的. 所以, 对于所有  $y'$  能使  $g(x, y') = 0$  的  $\mathfrak{N}$  里向量  $x$  仅有  $x = 0$ , 而对于所有  $x$  能使  $g(x, z') = 0$  的  $\mathfrak{N}'$  里向量  $z'$  仅有  $z' = 0$ , 則  $g$  是非退化的. 如果  $g$  是非退化的, 則映照  $L$  及  $R$  都是 1—1 的. 又因为  $\dim \mathfrak{N} = 0 = \dim \mathfrak{N}'$ , 故  $n = r = n'$ . 故知, 如果  $\mathfrak{N}$  与  $\mathfrak{N}'$  由一个非退化的双綫性形式結連着, 則这两个空間有相同的維数  $n$ . 我們还記得: 一个空間与它的綫性函数空間有相同的維数. 所以, 映照  $L$  及  $R$  是向量空間到相同維数的向量空間內的 1—1 綫性变换. 故知这些变换都是到对应空間上的映照. 关系  $n = r = n'$  也是双綫性形式成为非退化的充分条件; 这因为, 由这些关系显然可推得  $\dim \mathfrak{N} = n - r = 0$  及  $\dim \mathfrak{N}' = n' - r = 0$ . 上面結果可总結为下面的定理.

**定理 2.** 結連  $\mathfrak{N}$  与  $\mathfrak{N}'$  的一个双綫性形式  $g(x, y')$  是非退化的充要条件为: 1)  $\mathfrak{N}$  与  $\mathfrak{N}'$  有相同的維数; 2) 这个形式关于任意一对基的陣是滿秩陣. 如果  $g$  是非退化的, 而  $f_1(y')$  是  $\mathfrak{N}'$  里一个綫性函数, 則  $\mathfrak{N}$  里存在有一个向量  $x$  而且只有一个使  $g(x, y') = f_1(y')$  对于所有  $y'$  成立. 如果  $f_2(x)$  是  $\mathfrak{N}$  里任意綫性函数, 則  $\mathfrak{N}'$  里存在有唯一向量  $y'$  使  $g(x, y') = f_2(x)$  对于所有  $x$  成立.

如果由一个非退化的双綫性形式  $g$  結連两个向量空間  $\mathfrak{N}$  与  $\mathfrak{N}'$ , 則我們說这两个空間关于  $g$  是对偶的. 設  $\mathfrak{N}$  与  $\mathfrak{N}'$  关于  $g$  是对偶的, 并令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\mathfrak{N}$  的一个給定的基. 取  $\mathfrak{N}'$  的一个基  $(f_1, f_2, \dots, f_{n'})$ , 則得滿秩陣  $(\beta)$ , 这里  $\beta_{ij} = g(e_i, f_j)$ . 今令  $(v)$  是  $\Delta_n$

里任意滿秩陣, 并令  $v'_k = \sum f_{ik} v_i$  是  $\mathfrak{R}'$  里对应的新基, 則我們知道  $g(x, y')$  关于基  $(e_1, e_2, \dots, e_n), (v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$  的陣是  $(\beta)(v)$ . 故存在有  $\mathfrak{R}'$  的一个唯一决定的基  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  使  $g$  关于  $(e_1, e_2, \dots, e_n), (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  的陣是恆等陣, 亦即

$$(11) \quad g(e_i, e'_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

$e'_i$  可由取  $(v) = (\beta)^{-1}$  而得, 我們叫基  $(e_1, e_2, \dots, e_n), (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  做对偶空间的余基. 上面論証指出:  $\mathfrak{R}(\mathfrak{R}')$  里任一个基决定  $\mathfrak{R}'(\mathfrak{R})$  里唯一的余基.

余基曾用于討論  $\mathfrak{R}$  的子空間与  $\mathfrak{R}$  的共軛空間  $\mathfrak{R}^*$  的子空間之間关联性的概念. 这些空間关于基本双綫性形式  $s(x, f) \equiv f(x)$  是对偶的; 这因为, 对于所有  $x$  如果  $f(x) = 0$ , 則由定义知  $f = 0$ , 并且如果  $x \neq 0$ , 則存在有一个綫性函数  $f$  使  $f(x) \neq 0$ . 关联空間上的結果可移用于一般情形. 設令  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{R}'$  关于  $g(x, y')$  是对偶的, 如果  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  的一个子空間, 定义  $\mathfrak{S}$  的关联空間  $j(\mathfrak{S})$  为对于所有  $x \in \mathfrak{S}$  能使  $g(x, y') = 0$  的向量  $y' \in \mathfrak{R}'$  組成的子空間. 仿此可定义  $\mathfrak{R}'$  的子空間  $\mathfrak{S}'$  的关联空間  $j(\mathfrak{S}')$ . 如同在  $\mathfrak{R}$  及  $\mathfrak{R}^*$  的特殊情形<sup>1)</sup>, 我們可証  $\dim j(\mathfrak{S}) = n - \dim \mathfrak{S}$  及  $\dim j(\mathfrak{S}') = n - \dim \mathfrak{S}'$ . 这些关系与显著的关系  $j(j(\mathfrak{S})) \supseteq \mathfrak{S}$  及  $j(j(\mathfrak{S}')) \supseteq \mathfrak{S}'$  合併, 可推得

$$j(j(\mathfrak{S})) = \mathfrak{S}, \quad j(j(\mathfrak{S}')) = \mathfrak{S}'.$$

如同在綫性函数空間的特殊情形, 我們还可証明: 映照  $\mathfrak{S} \rightarrow j(\mathfrak{S})$  是  $\mathfrak{R}$  的子空間的格到  $\mathfrak{R}'$  的子空間的格上的一个反自同构. 这个反自同构的逆就是映照  $\mathfrak{S}' \rightarrow j(\mathfrak{S}')$ ; 这事实留作习题, 証讀者把討論的細節自行补充.

## 習 題 40

1. 令  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{R}'$  由双綫性形式  $g(x, y')$  結連着, 并令  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{R}'$  是由这个形式所决定的模集. 如果  $x + \mathfrak{R} \in \mathfrak{R}/\mathfrak{R}$ , 而  $y' + \mathfrak{R}' \in \mathfrak{R}'/\mathfrak{R}'$ , 令  $g(x + \mathfrak{R}, y' + \mathfrak{R}') = g(x, y')$ , 証明: 这就定义对于商空間  $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'/\mathfrak{R}'$  的一个非退化的双綫性形式.

4. 綫性变换关于一对双綫性形式的折轉 令  $\alpha_i (i = 1, 2)$  是

1) 参看第二章 §10 的引理.



左向量空間,并令  $\mathfrak{R}'_i$  是  $\mathfrak{R}_i$  关于双綫性形式  $g_i(x_i, y_i)$  的对偶空間. 如果  $A$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  內的一个綫性变换,則我們知道怎样用共軛空間  $\mathfrak{R}_2^*$  到共軛空間  $\mathfrak{R}_1^*$  內的綫性变换来定义折轉  $A^*$ . 如果  $f \in \mathfrak{R}_1^*$ , 則  $fA^*$  定义为  $Af$ . 因此我們可用  $\mathfrak{R}'_2$  到  $\mathfrak{R}'_1$  上的等价  $R_2$  来定义  $\mathfrak{R}'_2$  到  $\mathfrak{R}'_1$  內的綫性变换,亦即令

$$(12) \quad A' = R_2 A^* R_1^{-1}.$$

因为有了下面一系列的綫性映照:

$$R_2: \mathfrak{R}'_2 \rightarrow \mathfrak{R}_2^*,$$

$$A^*: \mathfrak{R}_2^* \rightarrow \mathfrak{R}_1^*,$$

$$R_1^{-1}: \mathfrak{R}_1^* \rightarrow \mathfrak{R}'_1.$$

上面这个积显然可以确定的. 我們还知道,  $A'$  是  $\mathfrak{R}'_2$  到  $\mathfrak{R}'_1$  內的一个綫性变换. 这个变换叫做  $A$  关于双綫性形式  $g_1$  及  $g_2$  的折轉.

其次是决定  $A'$  的形状. 令  $y'_2 \in \mathfrak{R}'_2$ , 則  $y'_2 R_2$  是空間  $\mathfrak{R}_2$  里的綫性函数  $g_2(x_2, y'_2)$ . 再則  $y'_2 R_2 A^*$  是  $\mathfrak{R}_1$  里使

$$(13) \quad f_1(x_1) = g_2(x_1 A, y'_2)$$

的綫性函数  $f_1$ . 最后,  $y'_2 R_2 A^* R_1^{-1}$  是对于所有  $x_1 \in \mathfrak{R}_1$  能使

$$(14) \quad f_1(x_1) = g_2(x_1 A, y'_2) = g_1(x_1, y'_1)$$

的  $\mathfrak{R}'_1$  里向量  $y'_1$ . 映照  $A'$  把  $y'_2$  映到  $y'_1$ , 而按照上面方程,  $y'_1 = y'_2 A'$  是对于所有  $x_1 \in \mathfrak{R}_1$  能使

$$(15) \quad g_1(x_1, y'_2 A') = g_2(x_1 A, y'_2)$$

的  $\mathfrak{R}'_1$  里唯一决定的向量.

因为对偶性概念是一种对称性的概念, 故在上面討論里可把  $\mathfrak{R}_i$  与  $\mathfrak{R}'_i$  的位置互換. 因此, 如果  $A'$  是  $\mathfrak{R}'_2$  到  $\mathfrak{R}'_1$  內的一个綫性变换, 則定义它(关于給定形式)的折轉是映照  $A'' = L_1 A'^* L_2^{-1}$ , 这里  $L_1$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}'_1^*$  上的基本等价,  $A'^*$  是  $A'$  的折轉, 而  $L_2$  是  $\mathfrak{R}_2$  到  $\mathfrak{R}'_2^*$  上的等价. 与(15)类似, 我們可驗證:  $x_1 A''$  是对于所有  $y'_2 \in \mathfrak{R}'_2$  能使

$$(16) \quad g_2(x_1 A'', y'_2) = g_1(x_1, y'_2 A')$$

的唯一决定的向量. 由(15)及(16)显然知, 如果  $A'$  是  $A$  的折轉, 則  $A$  是  $A'$  的折轉. 如果  $A''$  是  $A'$  的折轉, 則  $A'$  是  $A''$  的折轉. 所以, 两个对应  $A \rightarrow A', A' \rightarrow A''$  是互逆的. 于是,  $A \rightarrow A'$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$

到  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'_2, \mathfrak{R}'_1)$  上的一个 1—1 映照, 这里  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  内綫性变换的集合, 而  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'_2, \mathfrak{R}'_1)$  是  $\mathfrak{R}'_2$  到  $\mathfrak{R}'_1$  内綫性变换的集合. 这当然也可由折轉的定义及映照  $A \rightarrow A'$  的性质直接知道.

映照  $A \rightarrow A'$  的代数性质也可由前此建立的关于映照  $A \rightarrow A^*$  的性质演绎出; 这里只作叙述, 不加証明: 1) 如果  $B$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  内的另一个綫性变换, 則

$$(17) \quad (A + B)' = A' + B'.$$

2) 如果  $\mathfrak{R}_3$  与  $\mathfrak{R}'_3$  是关于非退化的双綫性形式  $g_3(x_3, y'_3)$  的对偶空間, 而  $C$  是  $\mathfrak{R}_2$  到  $\mathfrak{R}_3$  内的一个綫性变换, 則  $C$  关于  $g_2, g_3$  的折轉記作  $C'$ . 如果  $AC$  关于  $g_1, g_3$  的折轉記作  $(AC)'$ , 則有关系

$$(18) \quad (AC)' = C'A'.$$

3) 通常, 如果我們討論单一向量空間  $\mathfrak{R}$  及它关于  $g(x, y')$  的对偶空間, 則 1) 及 2) 指出: 映照  $A \rightarrow A'$  是  $\mathfrak{R}$  里綫性变换环到  $\mathfrak{R}'$  里綫性变换环上的一个反同构, 这里  $A'$  是  $A$  关于  $g$  的折轉.

最后, 我們要决定一个綫性变换的陣与它的折轉的陣之間的关系. 仍旧令  $A$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  内的一个綫性变换, 并令  $\mathfrak{R}'_1$  及  $\mathfrak{R}'_2$  分别是关于双綫性形式  $g_1$  及  $g_2$  的对偶空間. 令  $(e_1, e_2, \dots, e_{n_1})$  是  $\mathfrak{R}_1$  的一个基, 而  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_{n_1})$  是  $\mathfrak{R}'_1$  里的余基. 同理, 令  $(f_1, f_2, \dots, f_{n_2})$  是  $\mathfrak{R}_2$  的一个基, 而  $(f'_1, f'_2, \dots, f'_{n_2})$  是  $\mathfrak{R}'_2$  里的余基. 設

$$e_i A = \sum_{k=1}^{n_2} \alpha_{ik} f_k \quad (i = 1, 2, \dots, n_1),$$

$$f_l A' = \sum_{j=1}^{n_1} e'_j \alpha'_{jl} \quad (l = 1, 2, \dots, n_2).$$

則由条件

$$g_2(e_i A, f'_l) = g_1(e_i, f'_l A')$$

得陣的关系

$$\alpha_{il} = \alpha'_{il}.$$

如同在空間及綫性函数的对偶空間的特殊情形, 我們有: 如果使用余基于对偶空間, 則变换  $A$  的陣与它的折轉  $A'$  的陣相等.

## 習 題 41

1. 給上面 1), 2) 及 3) 的結果補充証明.

**5. 綫性變換與雙綫性形式間的另一個關係** 仍設空間  $\mathfrak{R}_i$  與  $\mathfrak{R}'_i (i = 1, 2)$  關於  $g_i$  是對偶的. 令  $u'$  及  $v$  順序是  $\mathfrak{R}'_1$  及  $\mathfrak{R}_2$  里固定向量, 如果  $x$  周歷  $\mathfrak{R}_1$ , 則映照

$$(19) \quad x \mapsto g_1(x, u')v$$

是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  內的一個綫性變換. 這可由雙綫性形式的性質而明白的. 因為這個變換由  $u', v$  所決定, 所以用“積”  $u' \times v$  來表示. 更一般地說, 如果  $u'_1, u'_2, \dots, u'_m \in \mathfrak{R}'_1$ , 而  $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathfrak{R}_2$ , 則綫性變換  $u'_1 \times v_1 + u'_2 \times v_2 + \dots + u'_m \times v_m$  是映照變換

$$x \mapsto g_1(x, u'_1)v_1 + g_1(x, u'_2)v_2 + \dots + g_1(x, u'_m)v_m.$$

其次, 我們証明:  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  內的任意綫性變換有這種形狀. 這因為, 令  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$ , 並令  $(v_1, v_2, \dots, v_r)$  是秩空間  $\mathfrak{R}_1 A$  的一個基. 如果  $x$  是  $\mathfrak{R}_1$  里任意向量, 則  $xA$  有一個方法而且只有一個方法寫成

$$(20) \quad xA = \phi_1 v_1 + \phi_2 v_2 + \dots + \phi_r v_r$$

的形狀, 這裡係數  $\phi_i \in \Delta$ . 因為這些係數由  $x$  唯一決定, 我們可把它們作為  $x$  的函數來考慮, 因此寫做  $\phi_i = \phi_i(x)$ . 故 (20) 可改寫為

$$(20') \quad xA = \phi_1(x)v_1 + \phi_2(x)v_2 + \dots + \phi_r(x)v_r.$$

如果  $y$  是  $\mathfrak{R}_1$  里另一個向量, 則

$$\begin{aligned} \sum \phi_i(x+y)v_i &= (x+y)A = xA + yA \\ &= \sum \phi_i(x)v_i + \sum \phi_i(y)v_i. \end{aligned}$$

所以,  $\phi_i(x+y) = \phi_i(x) + \phi_i(y)$ . 又由 (20'), 如果  $\alpha \in \Delta$ , 則

$$\begin{aligned} (\alpha x)A &= \alpha(xA) = \alpha\phi_1(x)v_1 + \alpha\phi_2(x)v_2 + \dots \\ &\quad + \alpha\phi_r(x)v_r, \end{aligned}$$

由此推得  $\phi_i(\alpha x) = \alpha\phi_i(x)$ . 所以, 函數  $\phi_i(x)$  是綫性函數. 因為  $g_1(x, y')$  是非退化形式, 故  $\mathfrak{R}'_1$  里有向量  $u'_i$  存在, 使對於所有  $x$ ,  $\phi_i(x) = g_1(x, u'_i)$ . 因此,

$$xA = g_1(x, u'_1)v_1 + g_1(x, u'_2)v_2 + \dots + g_1(x, u'_r)v_r,$$

而  $A = u'_1 \times v_1 + u'_2 \times v_2 + \cdots + u'_r \times v_r$  即为所求.

向量对  $(u'_1, v_1), (u'_2, v_2), \cdots, (u'_m, v_m)$  也定义  $\mathfrak{R}'_2$  到  $\mathfrak{R}'_1$  内的一个綫性变换  $A'$ . 如果  $x' \in \mathfrak{R}'_2$ , 則定义

$$x'A' = u'_1 g_2(v_1, x') + u'_2 g_2(v_2, x') + \cdots + u'_m g_2(v_m, x').$$

我們用

$$u'_1 \times' v_1 + u'_2 \times' v_2 + \cdots + u'_m \times' v_m$$

来表示这个变换. 这个記法指明: 变换  $A$  及  $A'$  关于双綫性形式  $g_1$  与  $g_2$  是折轉的; 这因为, 如果  $x$  是  $\mathfrak{R}_1$  里任意向量, 而  $x'$  是  $\mathfrak{R}'_2$  里任意向量, 則

$$g_1(x, x'A') = g_1\left(x, \sum_i u'_i g_2(v_i, x')\right) = \sum_i g_1(x, u'_i) g_2(v_i, x')$$

而

$$g_2(xA, x') = g_2\left(\sum_i g_1(x, u'_i) v_i, x'\right) = \sum_i g_1(x, u'_i) g_2(v_i, x').$$

所以,  $g_1(x, x'A') = g_2(xA, x')$ , 这証明了上面的論断.

我們再就綫性变换  $A$  用  $\sum_i u'_i \times v_i$  表示給予考虑, 由积  $u' \times v$  的定义显見

$$(21) \quad \begin{aligned} (u'_1 + u'_2) \times v &= u'_1 \times v + u'_2 \times v, \\ u' \times (v_1 + v_2) &= u' \times v_1 + u' \times v_2. \end{aligned}$$

$$(22) \quad u' \alpha \times v = u' \times \alpha v.$$

所以, 如果把  $u'_i$  写成  $u'_i = \sum e'_j \beta_{ji}$ , 則  $\sum u'_i \times v_i = \sum e'_j \beta_{ji} \times v_i = \sum e'_j \times \beta_{ji} v_i = \sum e'_j \times w_j$ , 这里  $w_j = \sum \beta_{ji} v_i$ . 所以, 如果我們能够把  $u'_i (i = 1, 2, \cdots, m)$  用少于  $m$  个的向量  $e'_j$  表出, 則可得  $A = \sum u'_i \times v_i$  用少于  $m$  个的积  $e'_j \times w_j$  之和表出. 同理, 如果  $v_i$  能写成  $v_i = \sum \alpha_{if} f_f$ , 这里  $f$  的个数小于  $m$ , 則可得  $A$  用少于  $m$  个的积之和表出的式.

今令  $A = \sum_1^r u'_i \times v_i$  是  $A$  的一个表示式, 这里  $r$  是最小的数, 則由上面的說明指出: 集合  $(u'_1, u'_2, \cdots, u'_r)$  及  $(v_1, v_2, \cdots, v_r)$  是綫性无关的, 但  $\mathfrak{R}_1$  里有向量  $(u_1, u_2, \cdots, u_r)$  存在使

$$g_1(u_i, u'_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, r).$$

于是,

$$u_i A = \sum_j g_1(u_i, u'_j) v_j = v_i,$$

而  $[v_1, v_2, \dots, v_r] \subseteq \mathfrak{R}_1 A$ . 另一方面, 对于任意的  $x$  有

$$xA = \sum_j g_1(x, u'_j) v_j \in [v_1, v_2, \dots, v_r].$$

所以  $\mathfrak{R}_1 A = [v_1, v_2, \dots, v_r]$ , 而  $r$  是  $A$  的秩. 如果使用上面决定的折轉的形式, 則知秩空間  $\mathfrak{R}_1 A' = [u'_1, u'_2, \dots, u'_r]$ . 这又給予  $A$  的秩等于  $A'$  的秩这一个定理以別証.

**6. 純量积** 如果  $\mathfrak{R}$  是域  $\Phi$  上一个左向量空間, 則我們知道  $\mathfrak{R}$  也可看作  $\Phi$  上一个右向量空間. 所以, 我們有可能定义結連  $\mathfrak{R}$  与它自身的双綫性形式, 并且有可能把  $\mathfrak{R}$  看作它自身的一个对偶空間. 如果可除环  $\Delta$  拥有一个反自同构, 則这些論述也适用于可除环情形.

故設  $\Delta$  是一个除环, 在这个环里定义有一个反自同构  $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ ; 也就是說定义一个映照, 它是  $\Delta$  到  $\Delta$  自身上的 1—1 映照, 并且适合条件:

$$(23) \quad \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}.$$

譬如,  $\Delta$  可取为汉米頓的四維数构成的除环, 而  $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$  是四維数映到它的共轭数的映照. 我們还知道, 如果  $\Delta = \Phi$  是一个域, 則反自同构就是  $\Phi$  里一个自同构, 所以, 此时可取  $\Phi$  的任意自同构为  $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ . 特别是可取  $\bar{\alpha} = \alpha$ , 亦即映照是恆等自同构. 这是古典的情形, 在討論中将得到特殊的注意.

令  $\mathfrak{R}$  是  $\Delta$  上一个(左)向量空間. 由使用給定的反自同构  $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ , 容易把  $\mathfrak{R}$  改成  $\Delta$  上一个右向量空間. 这只要令  $x\bar{\alpha} = \alpha x$ , 或者換句話說: 如果  $\alpha \mapsto \alpha'$  是  $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$  的逆映照, 則  $x\alpha = \alpha'x$ . 我們可以驗證用純量作右乘法的这个定义适合基本要求<sup>1)</sup>. 于是, 照这样做后,  $\mathfrak{R}$  就变为  $\Delta$  上一个右向量空間.  $\Delta$  上  $\mathfrak{R}$  的左及右向量空

1) 参看第一章 §2.

間的維數是相等的，事實上，如果  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个左(右)基，則顯然也是一个右(左)基；这因为，如果  $x = \sum \xi_i e_i$ ，則  $x = \sum e_i \bar{\xi}_i$ 。如果  $\sum e_i \delta_i = 0$ ，則还有  $\sum \delta_i^A e_i = 0$ ，故  $\delta_i^A = 0$ ，从而  $\delta_i = 0$ 。我們也看出： $\mathfrak{R}$  的任意左子空間是一个右子空間，其逆定理也成立。

今可考虑結連左向量空間  $\mathfrak{R}$  与右向量空間  $\mathfrak{R}$  的双綫性形式，这样形式叫做純量积。故純量积是定义在  $\mathfrak{R}$  里的向量对  $(x, y)$  的一个函数  $g(x, y)$ ，它的值  $\in \Delta$ ，并且适合方程

$$(24) \quad g(x_1 + x_2, y) = g(x_1, y) + g(x_2, y), \quad g(\alpha x, y) = \alpha g(x, y)$$

$$(25) \quad g(x, y_1 + y_2) = g(x, y_1) + g(x, y_2), \quad g(x, \alpha y) = g(x, y) \bar{\alpha};$$

因为  $\alpha y = y \bar{\alpha}$ ，所以(25)里第二个条件与(6)的第二部分等价。

如果  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\Delta$  上空間  $\mathfrak{R}$  的一个基， $(\beta)$  的元素  $\beta_{ij} = g(e_i, e_j)$ ，則陣  $(\beta)$  叫做純量积关于这个基的陣。这个概念显然是前面由双綫性形式結連的空間里的基所决定的这个形式的陣的概念的特殊化。一般而論，陣与基把函数  $g(x, y)$  完全决定；这因为。如果  $x = \sum \xi_i e_i$  而  $y = \sum \eta_j e_j$ ，則由(24)及(25)得

$$(26) \quad g(x, y) = \sum_{i,j} \xi_i \beta_{ij} \bar{\eta}_j.$$

反过来，如果已知  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  与  $(\beta)$ ，則可用此方程来定义  $\mathfrak{R}$  里一个純量积。

今討論基的改变对于純量积的陣的影响。令  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的另一个基，并設  $f_i = \sum \mu_{ij} e_j$ 。如果把它們看作右向量空間，則它們間的关系是  $f_i = \sum e_j v_{ji}$ ，这里  $v_{ji} = \bar{\mu}_{ij}$ 。故結連右基的陣是  $(v) = (\bar{\mu})'$ ，这个陣叫做陣  $(\mu)$  的共軛折轉陣。我們已知  $g(x, y)$  的新陣是  $(\gamma) = (\mu)(\beta)(v)^D$ ，故有关系

$$(27) \quad (\gamma) = (\mu)(\beta)(\bar{\mu})',$$

这里  $(\mu)$  是給出左基的改变的陣。按(27)用滿秩陣  $(\mu)$  連結的两个陣  $(\beta)$  与  $(\gamma)$  說是(关于給定的反自同构)同步的。这个关系易

---

1) 参看本章 §2.

知是一种等价。我們所建立的結果是：純量积的任意两个陣是同步的。如果 $(\beta)$ 是純量积的陣，則与 $(\beta)$ 同步的任意陣显然也是純量积的一个陣。

如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間，則函数 $g(x, y)$ 限于 $\mathfrak{S}$ 里向量对时(称短縮于 $\mathfrak{S}$ )，显然是 $\mathfrak{S}$ 的一个純量积。至此很自然地引入 $\mathfrak{R}$ 的子空間之間的下面等价概念。如果存在有子空間 $\mathfrak{S}_1$ 到 $\mathfrak{S}_2$ 上的一个1—1綫性变换 $U$ 使 $g(x_1, y_1) = g(x_1 U, y_1 U)$ 对于 $\mathfrak{S}_1$ 里所有 $x_1, y_1$ 都成立，則說 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 是 $g$ -等价的。如果 $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ 是 $\mathfrak{S}_1$ 的一个基，則 $(e_1 U, e_2 U, \dots, e_r U)$ 是 $\mathfrak{S}_2$ 的一个基，并且 $g(e_i, e_j) = g(e_i U, e_j U)$ 。于是， $g$ 关于这些基的短縮的陣是相等的。所以，如果在 $g$ -等价子空間里选择任意的基，則由这些基决定的陣是同步的。反过来，設 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 是子空間使 $g$ 对于这些空間的短縮的陣是同步的，則在 $\mathfrak{S}_2$ 里由基的适宜选取，可假設 $\mathfrak{S}_1$ 里有一个基 $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ 及 $\mathfrak{S}_2$ 里有一个基 $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ 使 $g(e_i, e_j) = g(f_i, f_j)$ 。今令 $x_1 = \sum \xi_i e_i$ ， $y_1 = \sum \eta_j e_j$ 是 $\mathfrak{S}_1$ 里任意两个向量，則有 $\sum_{i,j} \xi_i g(e_i, e_j) \bar{\eta}_j = \sum_{i,j} \xi_i g(f_i, f_j) \bar{\eta}_j$ ，并且由此給出 $g(x_1, y_1) = g(\sum \xi_i f_i, \sum \eta_j f_j)$ 。因为，映照 $x_1 = \sum \xi_i e_i \rightarrow \sum \xi_i f_i$ 是 $\mathfrak{S}_1$ 到 $\mathfrak{S}_2$ 上一个1—1綫性变换，所以前面的关系指明 $\mathfrak{S}_1$ 与 $\mathfrak{S}_2$ 是 $g$ -等价的。

**7. 厄米特純量积** 今設反自同构 $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ 是对合的，亦即对于所有 $\alpha$ 有 $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ 。我們先考虑厄米特純量积的理論，亦即对于所有 $x$ 及 $y$ 能使

$$(28) \quad g(y, x) = \overline{g(x, y)}$$

的理論。如果 $\Delta = \Phi$ 是一个域，而 $\bar{\alpha} \equiv \alpha$  (容許这样做)，則厄米特条件化为

$$(29) \quad g(y, x) = g(x, y).$$

适合这个条件的純量积叫做对称純量积。

如果 $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ 是 $\Delta$ 上 $\mathfrak{R}$ 的一个基，則条件(28)特別可推得

$$\beta_{ij} = g(e_i, e_j) = \overline{g(e_j, e_i)} = \bar{\beta}_{ji}.$$

所以,  $g(x, y)$  是厄米特純量积的一个必要条件是: 純量积的陣是厄米特陣, 亦即

$$(30) \quad (\beta)' = (\beta).$$

这个条件也是充分的; 这因为, 如果 (30) 成立, 且令  $x = \sum \xi_i e_i$  及  $y = \sum \eta_i e_i$ , 則

$$g(y, x) = \sum \eta_i \beta_{ij} \bar{\xi}_j = \sum \eta_i \bar{\beta}_{ji} \xi_j$$

而

$$\overline{g(x, y)} = \overline{\sum \xi_i \beta_{ij} \bar{\eta}_j} = \sum \eta_i \bar{\beta}_{ji} \xi_j.$$

于是,  $g(y, x) = \overline{g(x, y)}$ , 特别是:  $g(x, y)$  是对称的必須而且只須它的陣是对称的 ( $(\beta)' = (\beta)$ ).

如果  $g(x, y)$  是厄米特純量积, 則对于特殊向量  $u, v$  如果  $g(u, v) = 0$ , 可推知  $g(v, u) = \overline{g(u, v)} = 0$ . 如果这个条件成立, 則說向量  $u$  与  $v$  (关于  $g$ ) 正交. 上面的說明指出正交关系是一个对称关系, 亦即  $u$  与  $v$  正交, 則  $v$  也与  $u$  正交. 如果  $\Theta$  是  $\mathfrak{R}$  的一个子空間, 則与  $\Theta$  里每个向量  $u$  正交的向量  $v$  构成的空間叫做  $\Theta$  的正交余空間, 記作  $\Theta^\perp$ . 这与前此  $j(\Theta)$  的定义重合. 應該指出, 除重要的特殊情形 (其中若干情形将于后章論述) 外, 在子空間格里  $\Theta^\perp$  通常不是  $\Theta$  的一个余空間.

与  $\mathfrak{R}$  里每个向量  $x$  正交的向量  $z$  构成的子空間  $\mathfrak{R}^\perp$  叫做  $g(x, y)$  的根空間. 如果純量积的根空間  $\mathfrak{R}^\perp = 0$ , 則这純量积叫做非退化的. 我們知道, 此时映照  $\Theta \rightarrow \Theta^\perp$  是子空間格到它自身上的一个反自同构. 我們还知,  $\dim \Theta^\perp = n - \dim \Theta$ . 所以,  $\dim \Theta^{\perp\perp} = \dim \Theta$ . 因为显然  $\Theta^{\perp\perp} \supseteq \Theta$ , 故由这关系得  $\Theta^{\perp\perp} = \Theta$ . 所以, 由一个非退化的厄米特純量积决定的映照  $\Theta \rightarrow \Theta^\perp$  在子空間格里是一个对合映照.

如果  $\Theta \cap \Theta^\perp \neq 0$ , 則子空間  $\Theta$  叫做迷向的. 这显然可推得:  $\Theta$  含有一个非零迷向向量  $u$ , 亦即使  $g(u, u) = 0$  的向量  $u$ . 如果  $\Theta \subseteq \Theta^\perp$ , 則子空間  $\Theta$  叫做全迷向子空間.

如果  $g$  是非退化的, 而  $\Theta$  是一个非迷向子空間, 則  $\Theta \cap \Theta^\perp = 0$ , 并且  $\dim \Theta^\perp = n - \dim \Theta$ . 所以在此时得到分解  $\mathfrak{R} = \Theta \oplus \Theta^\perp$ .



## 習 題 42

1. 証明: 非零厄米特純量积的存在可推得反自同构  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  是对合的(所以, 在上節討論里, 后者条件是多余的).

2. 証明: 适合  $g(x, y) = g(y, x)$  的非零純量积的存在可推得  $\bar{\alpha} = \alpha$ , 因此推知  $\Delta$  是一个域.

3. 証明: 如果  $(\alpha)$  及  $(\beta)$  是厄米特陣, 則  $(\alpha) \pm (\beta)$ ,  $(\alpha)^r$ ,  $(\alpha)(\beta) + (\beta)(\alpha)$  都是厄米特陣.

4. 如果純量积  $h(y, x) = -\overline{h(x, y)}$ , 則  $h(x, y)$  叫做斜厄米特純量积. 令  $\mu$  是  $\Delta$  的一个元素, 适合  $\bar{\mu} = -\mu \neq 0$ , 并且令  $h(x, y)$  是斜厄米特純量积. 証明: 映照  $\xi \rightarrow \xi^* \equiv \mu^{-1} \bar{\xi} \mu$  在  $\Delta$  里是一个对合反自同构, 并且  $g(x, y) = h(x, y)\mu$  关于这个反自同构是厄米特純量积.

**8. 厄米特純量积的陣** 在厄米特純量积的討論中, 把特征数 2 的域上对称形式另行講述是比較方便的. 所以在本节里我們假定: 如果  $g$  是对称的, 則  $\Delta = \Phi$  的特征数  $\neq 2$ .

先考虑由純量积决定的单一向量  $x$  的函数  $g(x, x)$ . 如果  $g(x, y)$  是对称的, 則連带的函数  $g(x, x)$  叫做由对称形式决定的二次形式. 如果有非零向量  $u$  存在使  $g(u, u) = \beta \in \Delta$ , 我們通常說元素  $\beta$  由純量积表示. 因为

$$g(u, u) = \overline{g(u, u)},$$

所以  $\beta = \bar{\beta}$ . 于是, 由純量积表示的元素在反自同构下不变. 关于厄米特純量积的主要結果的証明中的一个重要步驟是下面的.

**引理.** 如果  $g(x, y)$  是非零的厄米特純量积, 則有由純量积表示的非零元素存在(換句話說, 如果  $\Re$  不是全迷向的, 則它含有一个非迷向向量).

**証** 如果結論是錯誤的, 則对于所有  $u$ ,  $g(u, u) = 0$ . 于是, 对于所有  $x, y$ ,

$$g(x, y) + g(y, x) = g(x + y, x + y) - g(x, x) - g(y, y) = 0.$$

因为  $g(y, x) = \overline{g(x, y)}$ , 由此就得出  $\overline{g(x, y)} = -g(x, y)$ . 但因为  $g(x, y) \neq 0$ , 故有向量  $u, v$  存在使  $\rho = g(u, v) \neq 0$ . 如果以  $\rho^{-1}u$  代替  $u$ , 并改变記法, 則可設  $g(u, v) = 1$ . 于是, 对于  $\Delta$  里任意  $\alpha$  有  $\overline{g(\alpha u, v)} = -g(\alpha u, v)$  及  $\bar{\alpha} = -\alpha$ . 因为  $\bar{1} = 1$ , 这可推得特

征数是2, 而  $\alpha = \alpha$ . 所以, 上面的反自同构是恆等映照, 而  $\Delta = \mathbb{C}$  是交換域. 这种情形已在假設中除去.

上面所用的論証不是构造性的. 但在  $g(x, y)$  是对称的这个特殊情形, 我們容易給出寻找向量  $u$  使  $g(u, u) \neq 0$  的构造方法. 令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}$  的一个基, 則有某个向量对  $e_i, e_j$  使  $g(e_i, e_j) \neq 0$ . 如果  $i = j$ , 則可取  $u = e_i$ ; 否則可設  $g(e_i, e_i) = 0 = g(e_j, e_j)$ , 而在  $i \neq j$  时  $g(e_i, e_j) \neq 0$ . 于是,  $g(e_i + e_j, e_i + e_j) = g(e_i, e_i) + g(e_i, e_j) + g(e_j, e_i) + g(e_j, e_j) = g(e_i, e_j) + g(e_j, e_i) = 2g(e_i, e_j) \neq 0$ .

今回到一般情形而証下面的

**定理 3.** 如果  $g(x, y)$  是厄米特純量積, 則有一个基  $(u_1, u_2, \dots, u_r, z_1, z_2, \dots, z_{n-r})$  存在使

$$(31) \quad g(u_i, u_i) = \beta_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

而其它純量積都是 0.

**証** 如果  $g = 0$ , 这个結果显然成立: 因为此时任意一个基可用作  $z$  的集合. 如果  $g \neq 0$ , 我們可取任意向量为  $u_1$ , 只要  $g(u_1, u_1) = \beta_1 \neq 0$ . 由引理知这样向量是存在的. 今設已决定了綫性无关向量  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  使  $g(u_i, u_i) = \beta_i \neq 0$ , 而  $i \neq j$  时  $g(u_i, u_j) = 0$ . 引入由

$$(32) \quad x \rightarrow \sum_{i=1}^k g(x, u_i) \beta_i^{-1} u_i$$

定义的映照  $E_k$ . 显然  $E_k$  是綫性的, 而把  $\mathfrak{R}$  映到空間  $\mathfrak{S}_k = [u_1, u_2, \dots, u_k]$  內. 又  $u_j E_k = \sum_i g(u_j, u_i) \beta_i^{-1} u_i = u_j$ . 于是,  $E_k$  在  $\mathfrak{S}_k$  里是恆等映照. 故  $E_k^2 = E_k$ , 因而如果命  $F_k = 1 - E_k$ , 則  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_k \oplus \mathfrak{R} F_k$ . 我們还有

$$\begin{aligned} g(x E_k, u_j) &= g\left(\sum_{i=1}^k g(x, u_i) \beta_i^{-1} u_i, u_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^k g(x, u_i) \beta_i^{-1} g(u_i, u_j) \end{aligned}$$

$$= g(x, u_i).$$

所以,  $g(xF_k, u_i) = g(x(1 - E_k), u_i) = g(x, u_i) - g(xE_k, u_i) = 0$ . 故  $\Re F_k$  里向量与  $\mathfrak{S}_k$  里每个向量正交, 亦即  $\Re F_k \subseteq \mathfrak{S}_k^\perp$ . 我們考虑  $\Re F_k$  里純量积  $g(x, y)$ . 如果它在  $\Re F_k$  里是 0, 則可在  $\Re F_k$  里选一个基  $(z_1, z_2, \dots, z_m)$ . 因为  $\Re = \mathfrak{S}_k \oplus \Re F_k$ , 所以  $(u_1, u_2, \dots, u_k, z_1, z_2, \dots, z_m)$  是  $\Re$  的一个基. 因为  $z$  与  $u$  正交并且与其它  $z$  正交, 所以这是所求形状的一个基. 另一方面, 如果在  $\Re F_k$  里  $g \neq 0$ , 則在这个空間里可求一个向量  $u_{k+1}$  使  $g(u_{k+1}, u_{k+1}) = \beta_{k+1} \neq 0$ . 于是,  $(u_1, u_2, \dots, u_{k+1})$  是綫性无关集合, 并且因为  $u_{k+1}$  与其它  $u_i$  正交, 所以新集合适合与  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  相同的条件. 于是可重复使用这方法.

我們給出的求正規化基的方法實質上創自拉格蘭日 (Lagrange). 應該指出, 我們可取由純量积表示的任意元素做  $\beta_i$ , 并且可以  $\gamma_i u_i$  ( $\gamma_i \neq 0$ ) 代替任意的  $u_i$ ; 后者使  $\beta_i$  变为  $\beta'_i = g(\gamma_i u_i, \gamma_i u_i) = \gamma_i \beta_i \gamma_i$ . 在施行上面方法时, 需有  $\Re F_k$  的一个基; 这可由  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  补充成  $\Re$  的一个基  $(u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_{n-k})$ . 于是,  $v_i F_k$  构成  $\Re F_k$  的一个基.

### 習 題 43

1. 如果  $\Phi$  是有理数域, 求与

$$(a) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

同步的对角陣  $(\beta)$ , 并求滿秩陣  $(\mu)$  使  $(\mu)(a)(\mu)' = (\beta)$ .

2. 証明: 定理 3 里給的空間  $[z_1, z_2, \dots, z_{n-r}]$  是  $g(x, y)$  的根空間.

3. 設  $\Phi$  的特征数  $\neq 2$ , 而  $g(x, y)$  是  $\Phi$  上  $\Re$  里一个对称非退化的純量积. 証明: 如果  $g$  表示 0, 則  $g$  是汎純量积, 亦即它表示  $\Phi$  的每个元素.

**9. 特殊除环上对称及厄米特純量积** 上面討論把厄米特陣的同步性問題化为求对角陣的同步性的条件問題. 这个問題还没有一般地解决. 已知的結果都是特殊情形, 他們对于  $\Delta$  的性質及反自同构的性質使用特殊的假定. 例如, 有理数域上对称陣的同步性問題已获得完全解决. 关于这个情形的理論, 主要是閔可斯

基(Minkowski)及哈斯(Hasse)的貢獻,實質是算術的,這裡就不討論了。本章余下部分的安排如次: 本节及 §10 叙述同步性問題的特殊情形,它們是每個學習數學的人都應該知道的。末了兩节叙述主要對專門學習代數的人感覺興趣的問題;譬如,在 §11 里再考慮厄米特形式的一般理論,並且討論符號差概念的威特的重要推廣; §12 叙述特征數 2 的域上對稱純量積理論。

我們先把上节結果限于對稱陣及對稱純量積 ( $\Delta = \Phi$  是一個域,  $\bar{\alpha} \equiv \alpha$ ), 並設  $\Phi$  的特征數  $\neq 2$ 。設  $g(x, y)$  是一個對稱純量積, 並令  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  是能够使

$$g(u_i, u_j) = \delta_{ij} \beta_i, \beta_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

的一個基, 則  $r$  是  $g(x, y)$  的陣  $\text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  的秩, 並且  $r$  是這個純量積的所有陣的公秩。我們已知可以  $v_i = \gamma_i u_i (\gamma_i \neq 0)$  代替  $u_i$ 。於是,  $v$  構成另一個基, 而由這個基決定的陣是

$$\text{diag}\{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n\},$$

這裡  $\beta'_i = \gamma_i^2 \beta_i$ 。故知任意  $\beta_i$  可以  $\beta'_i = \gamma_i^2 \beta_i (\gamma_i \neq 0)$  代替。今設  $\Phi$  是這樣的域, 它的每個元素都是平方數。如果  $\gamma^2 = \beta$ , 則依慣例記  $\gamma = \beta^{1/2}$ 。於是, 如果  $\beta_i \neq 0$ , 令  $\gamma_i = \beta_i^{-1/2} \equiv (\beta_i^{1/2})^{-1}$ 。這樣選取的  $\gamma_i$  把  $\beta_i$  換成  $\beta'_i = 1$ 。於是, 純量積的陣的形狀是

$$(33) \quad \text{diag}\{1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}.$$

特別在  $\Phi$  是代數閉域時, 這個形狀可以適用。

如果  $(\beta)$  是任意對稱陣, 則  $(\beta)$  可用以定義  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}$  里一個對稱純量積, 這個純量積的陣組成由  $(\beta)$  決定的同步類。故知: 如果  $\Phi$  是特征數  $\neq 2$  的代數閉域, 則  $\Phi_n$  里任意對稱陣  $(\beta)$  必與形狀 (33) 的一個陣是同步的。顯然 (33) 可由  $(\beta)$  的秩完全決定。由此推得下面的

**定理 4.** 如果  $\Phi$  是特徵數  $\neq 2$  的代數閉域, 則  $\Phi_n$  里任意兩個對稱陣是同步的必須而且只須它們有相同的秩。

次設  $\Phi$  是實數域。把向量  $u_i$  編列使

$$\beta_i > 0 (i = 1, 2, \dots, p); \beta_j < 0 \quad (j = p+1, \dots, r),$$

則在  $i \leq p$  時, 可求  $\beta_i$  的平方根; 而在  $r \geq j > p$  時可求  $-\beta_j$  的平

方根. 故令  $\gamma_i = \beta_i^{-1/2}$ ,  $\gamma_j = (-\beta_j)^{-1/2}$ . 如上面使用  $\gamma_i$ , 則得  $g(x, y)$  的一个陣

$$(34) \quad \overbrace{(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1, 0, \cdots, 0)}^{p, r, p}.$$

由此知, 任意实对称陣与形状(34)的陣是同步的. 其次, 我們將証: 形状(34)的两个陣除完全相等外在  $\Phi_n$  里不能成同步的, 这里  $\Phi$  是实数域. 这个結果可由下面的定理得出:

**定理 5.** (席柏斯忒). 如果  $\Phi$  是实数域, 而对角陣  $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ ,  $\{\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_n\}$

在  $\Phi_n$  里是同步的, 則正的  $\beta_i$  的个数  $p$  与正的  $\beta'_i$  的个数  $p'$  相同.

証 給定的两个陣可取为  $\Phi$  上空間  $\mathfrak{R}$  里的同一个对称純量积的陣. 我們可設在前面的  $p$  个  $\beta_i$  及  $p'$  个  $\beta'_i$  都是  $> 0$ ; 并且这两个陣的前面  $r$  个元素都  $\neq 0$ , 而后面  $n - r$  个元素都是 0. 令  $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$  是一个基,  $g(x, y)$  关于这个基的陣是  $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ ; 而  $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$  是一个基,  $g(x, y)$  关于这个基的陣是  $\{\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_n\}$ . 我們易知<sup>2)</sup>, 根空間

$$\mathfrak{R}^\perp = [u_{r+1}, u_{r+2}, \cdots, u_n] = [v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_n].$$

今引入下列的子空間:

$$\mathfrak{R}_+ = [u_1, u_2, \cdots, u_p],$$

$$\mathfrak{S}_+ = [v_1, v_2, \cdots, v_{p'}],$$

$$\mathfrak{R}_- = [u_{p+1}, u_{p+2}, \cdots, u_r],$$

$$\mathfrak{S}_- = [v_{p'+1}, v_{p'+2}, \cdots, v_r].$$

令  $y \in \mathfrak{R}_+ + \mathfrak{R}^\perp$ , 則  $y = \sum_1^p \eta_i u_i + \sum_{r+1}^n \eta_j u_j$ , 并且

$$g(y, y) = \sum_1^p \eta_i^2 \beta_i.$$

因为  $\beta_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, p)$ , 所以  $g(y, y) \geq 0$ ; 并且只在所有

1) 本章此后遇到对角陣时, 省略去記号 “diag”.

2) 參看习題 43 的第 2 題.

$\eta_i = 0 (i \leq p)$  时  $g(y, y) = 0$ . 所以, 如果  $y \in \mathfrak{R}_+ + \mathfrak{R}^\perp$ , 则  $g(y, y) \geq 0$ ; 并且只有  $y \in \mathfrak{R}^\perp$  时,  $g(y, y) = 0$ . 类似结果对于  $\mathfrak{S}_+ + \mathfrak{R}^\perp$  成立. 另一方面, 如果  $y \in \mathfrak{R}_- + \mathfrak{R}^\perp$  或  $y \in \mathfrak{S}_- + \mathfrak{R}^\perp$ , 则类似的论证指出  $g(y, y) \leq 0$ ; 并且只有  $y \in \mathfrak{R}^\perp$  时,  $g(y, y) = 0$ . 今令  $y \in (\mathfrak{R}_+ + \mathfrak{R}^\perp) \cap (\mathfrak{S}_- + \mathfrak{R}^\perp)$ , 则有  $g(y, y) \geq 0$  及  $g(y, y) \leq 0$ . 因此  $g(y, y) = 0$ , 而  $y \in \mathfrak{R}^\perp$ . 这建立了下面的关系:

$$(35) \quad (\mathfrak{R}_+ + \mathfrak{R}^\perp) \cap (\mathfrak{S}_- + \mathfrak{R}^\perp) = \mathfrak{R}^\perp.$$

今使用一般维数关系<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2) &= \dim \mathfrak{S}_1 + \dim \mathfrak{S}_2 - \dim(\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2) \\ &\geq \dim \mathfrak{S}_1 + \dim \mathfrak{S}_2 - n. \end{aligned}$$

把这个关系用于(35), 得

$$n - r \geq p + (n - r) + (r - p') + (n - r) - n.$$

所以  $p - p' \leq 0$ . 仿此又得  $p' \leq p$ ; 所以  $p = p'$ .

席柏斯忒定理指出, 在与给定的实对称阵( $\beta$ )同步的任意对角阵里, 正元素的个数是不变数. 在任意对角阵里正元素的个数与负元素的个数间之差  $2p - r$  是一个不变数; 这数目叫做阵的符号差(惯性指数). 此时, 实对称阵的主要定理可述成

**定理 6.** 两个实对称阵是同步的必须而且只须它们有相同的秩与相同的符号差.

次设  $\Phi$  是复数域, 而  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  是一个复数映到它的共轭复数的映照. 令  $g(x, y)$  是  $\Phi$  上空间  $\mathfrak{R}$  里的一个厄米特纯量积, 而  $\Phi$  连带有通常映照  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ . 则对于任意  $u$ ,  $\overline{g(u, u)} = g(u, u)$  是个实数. 特别是, 如果  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  是能使(31)成立的一个基, 则元素  $\beta_i$  是实数. 如果以  $v_i = \gamma_i u_i$  ( $\gamma_i \neq 0$ ) 代替  $u_i$ , 则  $\beta_i$  化为  $\gamma_i \bar{\gamma}_i \beta_i = |\gamma_i|^2 \beta_i$ . 所以此时  $\mathfrak{R}$  有一个基; 关于这个基, 阵的形状也是(34).

席柏斯忒定理在当前情形下也成立. 它断定: 如果  $\Phi$  是复数域, 而  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  与  $\{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n\}$  是同步的, 亦即  $L(\Phi, n)$  里有一个阵( $\mu$ )存在使

1) 参看习题 8 的第 2 题.

$$\{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n\} = (\mu)\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}(\bar{\mu})',$$

則正的  $\beta_i$  的个数与正的  $\beta'_i$  的个数相同. 証明恰与前面的証明相同: 要点是: 如果

$$y = \sum_i^p \eta_i u_i + \sum_{r+1}^n \eta_j u_j,$$

并且  $i \leq p$  时  $\beta_i > 0$ , 而  $j > r$  时  $\beta_j = 0$ , 則

$$g(y, y) = \sum |\eta_i|^2 \beta_i \geq 0.$$

与实数情形一样, 我們有下面的判断准则: 两个厄米特陣关于反自同构  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  是同步的必須而且只須它們有相同的秩及相同的符号差. 这里符号差也是定义做: 在与給定的厄米特陣同步的一个对角陣里正元素个数与負元素个数之差.

最后, 考虑四維数的厄米特形式的理論. 令  $\Delta$  是汉米頓的四維数构成的除环. 并且令  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  是四維数  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$  映到它的共轭数

$$\bar{\alpha} = \alpha_0 - \alpha_1 i - \alpha_2 j - \alpha_3 k$$

的映照. 如果  $g(x, y)$  是  $\Delta$  上  $\Re$  里的厄米特純量积, 則  $\overline{g(u, u)} = g(u, u)$  是个实数. 再則  $\alpha \bar{\alpha} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \geq 0$ , 而且只有  $\alpha = 0$  时等式才成立. 这些說明指出, 这个情形与复数的厄米特情形实质上相同. 形状(34)的陣在同步性下作为典型形式. 席柏斯忒定理及秩与符号差相等是同步性的充要条件也都成立.

#### 習 題 44

1. 証明:  $n$  行  $n$  列的实对称陣的同步类的个数是  $(n+1)(n+2)/2$ .
2. 求与实对称陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

同步的而形状为(34)的陣.

3. 求与厄米特四維数陣

$$\begin{bmatrix} -1 & 1+i-2j & -2i+k \\ 1-i+2j & 0 & 4i \\ 2i-k & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

同步的而形状为(34)的陣.

4. 証明:如果 $(\alpha), (\beta), \dots, (\nu)$  是 a) 实对称陣, 或 b) 复厄米特陣, 或 c) 四維数厄米特陣, 則只有 $(\alpha) = (\beta) = \dots = (\nu) = 0$  时

$$(\alpha)^2 + (\beta)^2 + \dots + (\nu)^2 = 0$$

才能成立.

**10. 交錯純量积** 如果对于所有  $x$  及  $y$ , 純量积  $g(x, y) = -g(y, x)$ , 則  $g(x, y)$  叫做斜称純量积. 此时  $g(x, x) = -g(x, x)$ ; 如果特征数  $\neq 2$ , 則可推得  $g(x, x) = 0$ ; 如果特征数是 2,  $g(x, x) = 0$  对于所有  $x$  也可以仍然成立. 如果对于所有  $x$  都得  $g(x, x) = 0$ , 則斜称純量积  $g(x, y)$  叫做交錯純量积. 今来叙述求这个类型純量积的适宜的典型基問題. 由 §5 的引理的証明知: 如果  $g(x, y)$  是交錯的, 則它是斜称的; 并且如果  $g \neq 0$  是斜称的, 則  $\bar{\alpha} \equiv \alpha$  而  $\Delta = \Phi$  是交換域.

設  $g(x, y)$  是交錯的, 并且不恆等于 0, 則可求一对向量  $u, v$  使  $g(u, v) \neq 0$ . 以  $v$  的适宜倍量  $v_1$  代替  $v$ , 則得  $u_1 = u$  与  $v_1$  使  $g(u_1, v_1) = 1$ . 于是,  $g(v_1, u_1) = -1$ ,  $g(u_1, u_1) = 0 = g(v_1, v_1)$ . 故  $u_1$  与  $v_1$  是綫性无关的. 今設我們已找到  $k$  对向量  $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_k, v_k$ , 它們都是綫性无关的, 并且适合

$$(36) \quad g(u_i, v_i) = 1, \quad g(v_i, u_i) = -1,$$

而所有其它純量积都等于 0. 令  $E_k$  表示綫性变换

$$(37) \quad x \rightarrow \sum_1^k g(x, v_i) u_i - \sum_1^k g(x, u_i) v_i.$$

如同定理 3 的証明, 我們知  $E_k$  是空間  $\mathfrak{S}_k = [u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_k, v_k]$  上一个射影. 所以, 如果  $F_k = 1 - E_k$ , 則  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_k \oplus \mathfrak{R}F_k$ . 我們还可驗証  $g(xE_k, u_i) = g(x, u_i)$ , 及  $g(xE_k, v_i) = g(x, v_i)$ . 所以  $g(xF_k, u_i) = 0 = g(xF_k, v_i)$ , 并且  $\mathfrak{R}F_k \subseteq \mathfrak{S}_k^{\perp 11}$ . 此时,  $g$  在  $\mathfrak{R}F_k$  里是 0, 或者在这个空間里我們可选一对向量  $u_{k+1}, v_{k+1}$  使

$$g(u_{k+1}, v_{k+1}) = 1 = -g(v_{k+1}, u_{k+1}).$$

因为  $\mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{R}F_k = 0$ , 所以  $(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{k+1}, v_{k+1})$  是一个无关集合, 并且因为最后两个向量与前面的正交, 所以  $2(k+1)$  个向量

1)  $\mathfrak{S}_k^{\perp}$  是  $\mathfrak{S}_k$  的正交余空間, 它的定义类似厄米特純量积的定义.



的集合也适合了与 $(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_r, v_r)$ 相同的条件. 最后, 或是生成整个空间, 或是获得一个空间  $\mathfrak{R}F_r$ , 使  $g$  在它里面等于 0. 在后者情形下, 我们取这个空间的任意基 $(z_1, \dots, z_{n-2r})$ , 则  $g(x, y)$  关于基

$$(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_r, v_r, z_1, z_2, \dots, z_{n-2r})$$

的陣显然是

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array} \right\} \quad r \text{ 块}.$$

这証明了下面的定理.

**定理 1.** 如果  $g(x, y)$  是一个交错純量積, 則  $\mathfrak{R}$  有一个基存在使  $g$  关于这个基的陣的形狀是(38).

如果  $g(x, y) \neq 0$  是交錯的, 則反自同构是恆等映照, 而  $g(x, y)$  的陣 $(\beta)$  是交錯陣, 亦即 $(\beta)' = -(\beta)$ , 并且  $\beta_{ii} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 这些条件也是充分的; 这因为, 如果  $x = \sum \xi_i e_i$ , 則

$$g(x, x) = \sum_{i,j} \beta_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_i \beta_{ii} \xi_i^2 + \sum_{i < j} (\beta_{ij} + \beta_{ji}) \xi_i \xi_j = 0.$$

所以  $g(x, y)$  是交錯純量積. 至此, 下面的結果是定理 7 的直接推論.

**系 1.** 元素属于域的一个交錯陣的秩是偶數.

**系 2.**  $\Phi_n$  里两个交錯陣是同步的必須而且只須它們有相同的秩.

## 習 題 45

1. 証明: 如果  $\Phi$  是有理数域, 則在  $\Phi_4$  里

1)  $\Theta_k^\perp$  是  $\Theta_k$  的正交余空間, 它的定义类似厄米特純量積的定义.

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

是同步的;并在  $L(\Phi, 4)$  里求一个  $(\mu)$  使  $(\beta) = (\mu)(\alpha)(\mu)'$ .

**\*11. 威特定理** 今再就可除环上厄米特纯量积的一般理论来说, 在当前的讨论里, 我们假定基本反自同构  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  适合下面的可解性条件.

**公理 S.** 方程  $\xi + \bar{\xi} = \beta$  对于可除环的每个厄米特元素  $\beta$  有一个解.

如果  $\Delta$  的特征数  $\neq 2$ , 就自动地适合这个公理; 这因为, 此时可取  $\xi = \frac{1}{2}\beta$ . 在  $\Delta$  的特征数为 2 的情形下, 如果  $\Delta$  的心  $I$  里有元素  $\gamma$  存在使  $\bar{\gamma} \neq \gamma$ , 则也适合这个公理; 这因为反自同构把  $I$  映到它自身, 所以  $\delta = \gamma + \bar{\gamma} \neq 0$  属于  $I$ . 所以, 如果  $\xi = \beta\gamma\delta^{-1}$ , 则

$$\xi + \bar{\xi} = \beta\gamma\delta^{-1} + \beta\bar{\gamma}\delta^{-1} = \beta\delta^{-1}(\gamma + \bar{\gamma}) = \beta.$$

最后, 我们注意到这个公理要把  $\Delta = \Phi$  而  $\Phi$  是特征数 2 的域及  $\bar{\alpha} = \alpha$  的情形除外. 这道理很明显, 因为此时  $\xi + \bar{\xi} = 0$ , 但  $\beta$  无须为 0.

设  $\mathfrak{R}$  是  $\Delta$  上向量空间, 而  $g(x, y)$  关于反自同构  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  是一个非退化的厄米特纯量积. 我们已知, 如果  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  的一个子空间, 它不是迷向的, 亦即  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}^\perp = 0$ , 则得分解  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{S}^\perp$ . 我们要阐明的理论的基本结果是下面的定理:

**威特定理** 如果  $\mathfrak{S}_1$  与  $\mathfrak{S}_2$  是非迷向的而且是  $g^-$  等价的, 则  $\mathfrak{S}_1^\perp$  与  $\mathfrak{S}_2^\perp$  是  $g^-$  等价的<sup>1)</sup>

证 我们证明关于  $\dim \mathfrak{S}_1 = 1$  时的结果就够了; 这因为, 如果

1) 威特对于特征数  $\neq 2$  的域上对称纯量积证明这个结果, 载在数学杂志 (Journal für Math.), 卷 176 (1937). 帕勃 (Pall) 推广到特征数  $\neq 2$  的除环情形, 载在美数学会通报 (Bulletin Amer. Math. Soc.), 卷 51 (1945). 在当前讨论里, 我们只假定公理 S 成立. 读者还可参看卡蒲兰斯基的在无限维空间内的形式 (Forms in infinite dimensional spaces) 载在巴西科学院纪事 (Anais Acad. Brasil) 卷 22 (1950), 第 1—7 页. 威特定理在对于特征数 2 的域上对称纯量积不成立 (参看下节)

已知这个情形,則可就  $\dim \mathfrak{S}_1$  使用归纳法如次. 在  $\mathfrak{S}_1$  里选一个向量  $u_1$  使  $[u_1]$  不是迷向的(定理 3 的引理), 于是  $\mathfrak{S}_1 = [u_1] \oplus \mathfrak{U}_1$ , 这里  $\mathfrak{U}_1 \subseteq [u_1]^\perp$ . 使用  $\mathfrak{S}_1$  与  $\mathfrak{S}_2$  的等价性, 則可写  $\mathfrak{S}_2 = [u_2] \oplus \mathfrak{U}_2$ , 这里  $\mathfrak{U}_2 \subseteq [u_2]^\perp$ ,  $[u_1]$  与  $[u_2]$  是等价的, 并且  $\mathfrak{U}_1$  与  $\mathfrak{U}_2$  是等价的. 于是,  $[u_1]^\perp = \mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{S}_1^\perp$  与  $[u_2]^\perp = \mathfrak{U}_2 \oplus \mathfrak{S}_2^\perp$  在一个变换  $U$  下是等价的. 所以,  $[u_2]^\perp = \mathfrak{U}_2 \oplus \mathfrak{S}_2^\perp = \mathfrak{U}_1 U \oplus \mathfrak{S}_1^\perp U$ . 但  $\mathfrak{U}_2$  与  $\mathfrak{U}_1 U$  是等价的, 而  $\mathfrak{U}_1 U$  与  $\mathfrak{S}_1^\perp U$  是正交的. 因为  $\dim \mathfrak{U}_1 U < \dim \mathfrak{S}_1$  而  $\mathfrak{U}_1$  不是迷向的, 故可設  $\mathfrak{S}_1^\perp U$  与  $\mathfrak{S}_2^\perp$  是等价的. 由此可推知,  $\mathfrak{S}_1^\perp$  与  $\mathfrak{S}_2^\perp$  是等价的.

其次要說的是:  $\mathfrak{S}_1 = [u_1]$  而  $\dim \mathfrak{R}$  是任意的这个情形可由  $\mathfrak{S}_1 = [u_1]$  而  $\dim \mathfrak{R} = 2$  的特殊情形演繹出. 故設已知特殊情形的結果, 令  $\mathfrak{S}_2 = [u_2]$  与  $[u_1]$  等价, 則得分解  $\mathfrak{R} = [u_1] \oplus [u_1]^\perp = [u_2] \oplus [u_2]^\perp$  并且  $g(u_1, u_1) = g(u_2, u_2)$ . 如果  $[u_1, u_2]$  是一維, 則  $[u_1]^\perp = [u_2]^\perp$ , 而定理成立. 于是, 設  $\dim [u_1, u_2] = 2$ . 先考虑这个空間不是迷向的情形. 此时,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= [u_1, u_2] \oplus [u_1, u_2]^\perp \\ (39) \quad &= [u_1] \oplus ([u_1, u_2] \cap [u_1]^\perp) \oplus [u_1, u_2]^\perp \\ &= [u_2] \oplus ([u_1, u_2] \cap [u_2]^\perp) \oplus [u_1, u_2]^\perp. \end{aligned}$$

于是, 由  $\dim \mathfrak{R} = 2$  的情形,  $[u_1, u_2] \cap [u_1]^\perp$  与  $[u_1, u_2] \cap [u_2]^\perp$  是等价的(施于  $\mathfrak{R} = [u_1, u_2]$ ). 故由(39)得

$$[u_1]^\perp = ([u_1, u_2] \cap [u_1]^\perp) \oplus [u_1, u_2]^\perp$$

与

$$[u_2]^\perp = ([u_1, u_2] \cap [u_2]^\perp) \oplus [u_1, u_2]^\perp$$

是  $g$ -等价的. 次考虑  $[u_1, u_2]$  是迷向的情形. 此时这个空間里有一个向量  $w \neq 0$  使  $g(w, u_1) = 0 = g(w, u_2)$ . 在  $\mathfrak{R}$  里可求一个  $t$  使  $g(w, t) \neq 0$ . 于是  $[u_1, u_2, t]$  里  $g$  关于基  $(w, u_1, t)$  的陣是

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & g(w, t) \\ 0 & g(u_1, u_1) & * \\ g(t, w) & * & * \end{bmatrix}.$$

显然这个陣的行向量是綫性无关的; 所以陣是滿秩的, 并且  $[u_1, u_2, t]$  不是迷向的. 于是,

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= [u_1, u_2, t] \oplus [u_1, u_2, t]^\perp \\ &= [u_1] \oplus ([u_1, u_2, t] \cap [u_1]^\perp) \oplus [u_1, u_2, t]^\perp \\ &= [u_2] \oplus ([u_1, u_2, t] \cap [u_2]^\perp) \oplus [u_1, u_2, t]^\perp.\end{aligned}$$

故只須証  $[u_1, u_2, t] \cap [u_1]^\perp$  与  $[u_1, u_2, t] \cap [u_2]^\perp$  是等价的就够了, 但它们都是非迷向的二維空間, 而含有一个迷向的一維子空間  $[w]$ .

在这种类型的空間里常可选择·一个基使陣关于这个基是  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

要証这事实, 选取  $q$  使  $g(w, q) = 1 = g(q, w)$ , 并且令  $z = q + \lambda w$ . 于是, 还有  $g(z, w) = 1 = g(w, z)$ , 而  $g(z, z) = g(q, q) + \lambda + \bar{\lambda}$ . 由公理 S, 我們可选  $\lambda$  使  $g(z, z) = 0$ . 这就得出所要形状的陣. 至此知  $[u_1, u_2, t] \cap [u_1]^\perp$  与  $[u_1, u_2, t] \cap [u_2]^\perp$  是等价的, 这就完成了归結到  $\dim \mathfrak{R} = 2, \dim \mathfrak{S}_1 = 1$  情形的化簡.

最后考虑这个特殊情形. 这里要証的結果等价于說: 如果滿秩的对角厄米特陣  $\{\alpha, \beta_1\}$  与  $\{\alpha, \beta_2\}$  是同步的, 則元素  $\beta_1$  与  $\beta_2$  是同步的. 令  $(\mu)$  是一个滿秩陣使

$$(40) \quad \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu}_{11} & \bar{\mu}_{21} \\ \bar{\mu}_{12} & \bar{\mu}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

如果  $\Delta$  是可交換的, 由求行列式得  $\beta_2 = \mu \beta_1 \bar{\mu}$ , 这里  $\mu = \det(\mu_{ij})$ . 这就是所要的結果. 在一般情形, 我們要由陣的关系給出的条件直接作处理. 这些条件是

$$(41) \quad \mu_{11} \alpha \bar{\mu}_{11} + \mu_{12} \beta_1 \bar{\mu}_{12} = \alpha,$$

$$(42) \quad \mu_{11} \alpha \bar{\mu}_{21} + \mu_{12} \beta_1 \bar{\mu}_{22} = 0 = \mu_{21} \alpha \bar{\mu}_{11} + \mu_{22} \beta_1 \bar{\mu}_{12},$$

$$(43) \quad \mu_{21} \alpha \bar{\mu}_{21} + \mu_{22} \beta_1 \bar{\mu}_{22} = \beta_2.$$

如果  $\mu_{11} = 0$ , 因为  $\mu_{12} \neq 0$ , 故由(42)得  $\mu_{22} = 0$ . 于是,  $\alpha = \mu_{12} \beta_1 \bar{\mu}_{12}$  而  $\beta_2 = \mu_{21} \alpha \bar{\mu}_{21}$ . 由这些关系可推得  $\beta_1$  与  $\beta_2$  是同步的.

故設  $\mu_{11} \neq 0$ . 于是, 由(42)得

$$\begin{aligned}\alpha \bar{\mu}_{21} &= -\mu_{11}^{-1} \mu_{12} \beta_1 \bar{\mu}_{22}, \\ \mu_{21} &= -\mu_{22} \beta_1 \bar{\mu}_{12} \bar{\mu}_{11}^{-1} \alpha^{-1},\end{aligned}$$

故由(43)得

$$\mu_{22} (\beta_1 \bar{\mu}_{12} \bar{\mu}_{11}^{-1} \alpha^{-1} \mu_{11}^{-1} \mu_{12} \beta_1 + \beta_1) \bar{\mu}_{22} = \beta_2.$$

所以  $\beta_2$  与  $\beta_1 \bar{\mu}_{12} \bar{\mu}_{11}^{-1} \alpha^{-1} \mu_{11}^{-1} \mu_{12} \beta_1 + \beta_1$  是同步的, 我們还要証后者元素与  $\beta_1$  是同步的, 要达到这个目的, 試解

$$(44) \quad (1 + \beta_1 \bar{\mu}_{12} \bar{\xi} \mu_{12}) \beta_1 (1 + \bar{\mu}_{12} \bar{\xi} \mu_{12} \beta_1) \\ = \beta_1 \bar{\mu}_{12} \bar{\mu}_{11}^{-1} \alpha^{-1} \mu_{11}^{-1} \mu_{12} \beta_1 + \beta_1.$$

如果

$$(45) \quad \xi + \bar{\xi} + \xi \mu_{12} \beta_1 \bar{\mu}_{12} \bar{\xi} = (\mu_{11} \alpha \bar{\mu}_{11})^{-1},$$

則可滿足上面方程, 从(41)解出  $\mu_{12} \beta_1 \bar{\mu}_{12}$ , 代入(45)得

$$(46) \quad \xi + \bar{\xi} + \xi (\alpha - \mu_{11} \alpha \bar{\mu}_{11}) \bar{\xi} = (\mu_{11} \alpha \bar{\mu}_{11})^{-1}.$$

如果  $\mu_{11} = 1$ , 則(46)化为  $\xi + \bar{\xi} = (\mu_{11} \alpha \bar{\mu}_{11})^{-1}$ ; 由公理 S 知这是可解的. 如果  $\mu_{11} \neq 1$ , 作代換  $\xi = \eta^{-1}$ , 并以  $\eta$  左乘及以  $\bar{\eta}$  右乘, 得

$$(47) \quad \eta + \bar{\eta} + (\alpha - \mu_{11} \alpha \bar{\mu}_{11}) = \eta (\mu_{11} \alpha \bar{\mu}_{11})^{-1} \bar{\eta}.$$

次以  $\eta = \zeta + \mu_{11} \alpha \bar{\mu}_{11}$  代入, 得

$$(48) \quad \zeta (\mu_{11} \alpha \bar{\mu}_{11})^{-1} \bar{\zeta} = \alpha.$$

今  $\zeta = -\alpha \bar{\mu}_{11}$  能适合(48); 所以  $\eta = (\mu_{11} - 1) \alpha \bar{\mu}_{11}$  (它不是0)适合(47). 于是  $\xi = \eta^{-1}$  适合(46), 故(44)成立, 而  $\beta_1$  与  $\beta_2$  是同步的, 这就完成了証明.

令  $U$  是  $\mathfrak{R}$  到它自身上的一个 1—1 綫性变换, 如果对于  $\mathfrak{R}$  里每对向量  $x, y, g(xU, yU) = g(x, y)$  成立, 則  $U$  叫做  $g$ -单式变换. 这个条件显然与要求  $UU' = 1$  等价, 这里  $U'$  是  $U$  关于純量积的折轉. 今再設  $\mathfrak{S}_1$  与  $\mathfrak{S}_2$  是非迷向空間, 它們是  $g$ -等价的, 并且令  $M$  是  $\mathfrak{S}_1$  到  $\mathfrak{S}_2$  上的一个  $g$ -等价. 由威特定理可求  $\mathfrak{S}_1^\perp$  到  $\mathfrak{S}_2^\perp$  上的一个等价  $N$ . 因为  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_1^\perp$ , 任意向量  $x$  可有一个方法而且只有一个方法写成  $u + v$ , 这里  $u \in \mathfrak{S}_1$  而  $v \in \mathfrak{S}_1^\perp$ . 于是, 映照  $U: x \rightarrow uM + vN$  是  $\mathfrak{R}$  到它自身上的一个 1—1 綫性变换. 再則, 使用  $uM \in \mathfrak{S}_2$  及  $vN \in \mathfrak{S}_2^\perp$  的事实, 我們可直接驗証  $U$  是  $g$ -单式变换. 在子空間  $\mathfrak{S}_1$  上,  $U$  显然与給定的等价  $M$  重合, 故知从威特定理可推得: 非迷向子空間之間的任意  $g$ -等价可扩张为一个  $g$ -单式变换. 我們今將証明这个結果对于  $\mathfrak{R}$  的迷向子空間也是成立的.

先考虑  $\mathfrak{R}$  的一个任意子空間  $\mathfrak{S}$ . 如果  $x$  是  $\mathfrak{R}$  里任意向量, 則  $\mathfrak{S}$  到  $\Delta$  內的映照  $y \rightarrow g_x(y) \equiv g(y, x)$  是一个綫性函数. 我們易知

这样所得的綫性函数充滿  $\mathfrak{S}$  的共軛空間  $\mathfrak{S}^{*0}$ 。所以, 如果  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  是  $\mathfrak{S}$  的任意基, 則可求一个向量  $v_1$ , 使

$$(49) \quad g(y_1, v_1) = 1, g(y_i, v_1) = 0 (i > 1).$$

今設  $\mathfrak{S}$  是迷向的, 而  $(y_1, y_2, \dots, y_v)$  是  $\mathfrak{S}$  的根空間的一个基, 則可取向量  $v_1$  使 (49) 之外还有  $g(v_1, v_1) = 0$ ; 这可由用于威特定理的証明里的論証得出。所以, 如果  $v_1$  不与它自身正交, 則可用  $v_1 + \lambda y_1$  代替这个向量, 而选取  $\lambda$  使  $\lambda + \bar{\lambda} + g(v_1, v_1) = 0$ 。然后用  $v_1$  表示这个新向量。

今空間  $[y_1, v_1]$  是  $\mathfrak{R}$  的一个二維非迷向子空間, 所以  $\mathfrak{R} = [y_1, v_1] \oplus [y_1, v_1]^\perp$ 。  $[y_2, \dots, y_m] \subseteq [y_1, v_1]^\perp$  及  $[y_2, \dots, y_v]$  是  $[y_2, \dots, y_m]$  的根空間也是显然的。所以, 我們可对于  $v$  使用归納法来証明能使

$$(50) \quad \begin{aligned} g(y_j, v_j) &= 1 \quad (j = 1, 2, \dots, v), \\ g(y_i, v_j) &= 0 \quad (\text{其余情形}), \\ g(v_j, v_k) &= 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, v). \end{aligned}$$

的向量集合  $(v_1, v_2, \dots, v_v)$  的存在。我們易知, 向量  $(v_1, v_2, \dots, v_v)$  是綫性无关的, 并且空間  $\mathfrak{V} = [v_1, v_2, \dots, v_v]$  是全迷向的, 适合  $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{S} = 0$ 。在  $\mathfrak{S} + \mathfrak{V}$  里  $g$  关于基  $(y_1, y_2, \dots, y_m, v_1, v_2, \dots, v_v)$  的陣是

$$(51) \quad \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & B & 0 \\ \hline \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix} & 0 & 0 \end{array} \right],$$

这里  $B$  是关于  $(y_{v+1}, \dots, y_m)$  的陣。因为  $[y_1, \dots, y_v]$  是  $\mathfrak{S}$  的根空間, 所以  $B$  是滿秩陣。于是, (51) 是滿秩陣, 从而  $\mathfrak{S} + \mathfrak{V}$  不是迷向的。

1) 参看习题 19 的第 2 題。

今令  $U$  是  $\mathfrak{S}$  (到  $\mathfrak{S}U$  上) 的一个等价; 显然  $[y_1U, \dots, y_vU]$  是  $\mathfrak{S}U$  的根空間, 所以可找到向量集合  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_v)$  使

$$g(y_jU, \bar{v}_i) = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, v),$$

$$g(y_iU, \bar{v}_j) = 0 \quad (\text{其余情形}),$$

$$g(\bar{v}_i, \bar{v}_k) = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, v).$$

显然把  $v_i$  映到  $\bar{v}_i$  且在  $\mathfrak{S}$  上与  $U$  重合的綫性变换是  $\mathfrak{S} + \mathfrak{B}$  的一个等价. 因为  $\mathfrak{S} + \mathfrak{B}$  不是迷向的, 所以这个映照可扩张为一个  $g$ -单式变换, 因此我們把下面的定理証明了.

**定理 8.**  $\mathfrak{R}$  的一个子空間的任意  $g$ -等价可擴張为  $\mathfrak{R}$  里一个  $g$ -单式变换<sup>1)</sup>.

如果对于  $\mathfrak{R}$  里每个  $x \neq 0$  有  $g(x, x) \neq 0$ , 則厄米特純量积叫做全正則的. 这等价于說:  $\mathfrak{R}$  的每个非零子空間不是迷向的. 所以, 如果  $g$  是全正則的, 并且  $\mathfrak{S}$  是任意子空間, 則  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{S}^\perp$ . 今將証明: 厄米特陣的同步性問題可化簡为相伴的純量积是全正則的情形来討論.

令  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  的一个极大的全迷向子空間, 亦即它不能嵌入較大的这类型子空間里. 記  $\mathfrak{S} = [y_1, \dots, y_v]$ , 这里  $y_i$  是綫性无关的, 我們如前决定一个全迷向空間  $\mathfrak{B} = [v_1, v_2, \dots, v_v]$  使  $\mathfrak{K} = \mathfrak{S} + \mathfrak{B} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{B}$ , 并且使  $g$  关于  $\mathfrak{K}$  的基  $(y_1, \dots, y_v, v_1, \dots, v_v)$  的陣是

$$(52) \quad \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \end{array} \right].$$

因为  $\mathfrak{S}$  是一个极大的全迷向子空間, 并且  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{K}^\perp$ , 所以  $g$  在  $\mathfrak{K}^\perp$  里是全正則的. 我們可选取  $\mathfrak{R}$  的一个基, 使  $g$  的陣的形状是

1) 参着狄佑当納 (Dieudonné) 著关于典型羣 (Sur Les Groupes Classiques), 第 18 頁.

$$(53) \quad \left[ \begin{array}{c|cc} & 1 & \cdots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline 1 & & 0 & 0 \\ \cdots & & & \\ & 1 & & \\ \hline 0 & 0 & B \end{array} \right],$$

这里  $B$  是  $g$  在  $\mathfrak{K}^\perp$  里的陣，故任意厄米特陣与一个形状如 (53) 的陣是同步的，其中  $B$  是全正則陣块（亦即，相伴的純量积是全正則的）。

反过来，設有  $g$  的任意陣的形状如 (53)，其中  $B$  是全正則的。令  $(y_1, \cdots, y_\nu, v_1, \cdots, v_\nu, z_1, \cdots, z_{n-2\nu})$  是一个基能使  $g$  关于这个基的陣是給定的陣 (53)，則  $\mathfrak{S} = [y_1, \cdots, y_\nu]$  是全迷向的。还有  $\mathfrak{S}$  是极大全迷向的；这因为，如果有一个更大的全迷向子空間含有  $\mathfrak{S}$ ，則它含有形状如  $v + z$  的一个非零向量，这里  $v \in [v_1, \cdots, v_\nu]$  而  $z \in [z_1, \cdots, z_{n-2\nu}]$ 。于是， $g(v + z, v + z) = g(z, z) = 0$ ，而  $z = 0$ 。如果  $v = \sum \gamma_i v_i$ ，則  $g(v, y_i) = \gamma_i$ 。所以也有  $v = 0$ ，这与  $v + z \neq 0$  矛盾。

在这里我們要証：形状如 (53) 的两个陣 (其中  $B$  是全正則的) 是同步的必須而且只須陣  $B$  是同步的。“只須”部分是明显的，而前面的討論指出这“必須”部分等价于說：如同上面由一个极大的全迷向子空間  $\mathfrak{S}$  所决定的空間  $\mathfrak{K}^\perp$  是  $g$ -等价的。

我們先考察任意两个极大的全迷向子空間有相同维数。譬如令  $\mathfrak{S}_1$  与  $\mathfrak{S}_2$  是这个类型的子空間，并設  $\dim \mathfrak{S}_1 \geq \dim \mathfrak{S}_2$ 。則可求得  $\mathfrak{S}_1$  的一个子空間  $\mathfrak{U}_1$  使  $\dim \mathfrak{U}_1 = \dim \mathfrak{S}_2$ 。因为  $\mathfrak{U}_1$  与  $\mathfrak{S}_2$  都是全迷向的，故  $\mathfrak{U}_1$  到  $\mathfrak{S}_2$  上的任意 1-1 綫性变换是一个  $g$ -等价；所以它可扩张为一个单式变换  $U$ 。于是， $\mathfrak{S}_1 U$  是全迷向的，并且含有  $\mathfrak{U}_1 U = \mathfrak{S}_2$ 。由  $\mathfrak{S}_2$  的极大性就可推得  $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{S}_1$ ，并且  $\dim \mathfrak{S}_1 = \dim \mathfrak{S}_2$ 。

今令  $\mathfrak{S}_i = [y_i^{(j)}, \cdots, y_\nu^{(j)}]$  ( $i = 1, 2$ )，并决定  $\mathfrak{B}_i = [v_i^{(j)}, \cdots, v_\nu^{(j)}]$  如前，使  $g$  在  $\mathfrak{K}_i = \mathfrak{S}_i + \mathfrak{B}_i$  里的陣是 (52)。則  $\mathfrak{K}_1$  与  $\mathfrak{K}_2$  是  $g$ -



等价的;于是,  $\mathfrak{K}_1^\perp$  与  $\mathfrak{K}_2^\perp$  也是  $g$ -等价的, 故建立了下面的定理.

**定理 9.** 任意满秩厄米特阵必与一个 (53) 形状的阵是同步的, 其中  $B$  是全正则的; (53) 形状的两个阵 (其中  $B$  是全正则的) 是同步的必须而且只须子阵  $B$  是同步的.

阵  $B$  的行及列数是同步类的一个不变数. 这个数目是空间  $\mathfrak{K}^\perp$  的维数, 并且也是  $n - 2\nu$ , 这里  $\nu$  是关于  $g$  的全迷向子空间的极大维数. 这个非负整数叫做  $g$  的或相伴阵的威特符号差. 我們知道<sup>1)</sup>, 对于实数域上对称阵, 或者对于复数域或实四维数上厄米特阵, 威特符号差是前此定义的普通符号差的绝对值.

## 習 題 46

1. 証明前此关于符号差的命题.
2. 如果  $g$  是一个交错非退化的純量积, 则能够使  $g(xS, yS) = g(x, y)$  的  $\mathfrak{R}$  的一个 1—1 綫性变换  $S$  叫做耦对变换<sup>2)</sup>. 証明定理 8 的类似定理:  $\mathfrak{R}$  的一个子空间的任意  $g$ -等价可扩张为一个耦对变换.

**\*12. 非交错斜称形式** 最后設  $g(x, y)$  是一个斜称純量积, 但不是交错的, 則  $\Phi$  有特征数 2, 而  $g(x, y)$  也可看作对称的. 再則我們已知, 如果  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基, 則有某些  $i$  使  $g(e_i, e_i) \neq 0$ . 今將証: 我們能选取  $\mathfrak{R}$  的一个基  $(u_1, u_2, \dots, u_r, z_1, z_2, \dots, z_{n-r})$  使由这个基决定的阵是

$$\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, 0, 0, \dots, 0\},$$

这里  $\beta_i \neq 0$ . 显然可选取  $u_1$  使  $g(u_1, u_1) = \beta_1 \neq 0$ . 今設已找到  $u_1, u_2, \dots, u_k$  使  $g(u_i, u_j) = \delta_{ij}\beta_i$ , 这里  $\beta_i \neq 0$ . 如同在定理 3 的証明里, 我們可記  $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{R}F_k$ , 这里  $\mathfrak{G}_k = [u_1, u_2, \dots, u_k]$ , 而  $\mathfrak{R}F_k \subseteq \mathfrak{G}_k^\perp$ . 如果在  $\mathfrak{R}F_k$  里  $g(x, y)$  恆等于 0, 則命  $k = r$ , 并于  $\mathfrak{R}F_k$  里选取一个基  $(z_1, z_2, \dots, z_{n-r})$ . 如果  $g(x, y)$  在  $\mathfrak{R}F_k$  里不是交错的, 則在这个子空间里可选取一个向量  $u_{k+1}$  使  $g(u_{k+1}, u_{k+1}) = \beta_{k+1} \neq 0$ . 然后就这  $k + 1$  个  $u$  重复上面的論証. 我們还要考虑

1) 参看上面习题 46 的第 1 題.

2) 耦对变换也譯作辛变换. 一譯者注.

$g(x, y)$  在  $\Re F_k$  里不恆等于 0 并且是交錯的情形。此时可求得两个綫性无关的向量  $v, w$  使

$$g(v, v) = 0 = g(w, w), g(v, w) = 1 = g(w, v).$$

今令  $u = u_k, \beta = \beta_k$ , 并且考虑三維空間  $[u, v, w]$  里的純量积。使用这些向量为基, 得陣

$$\begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以, 如果  $y = \xi u + \eta v + \zeta w$ , 及  $y' = \xi' u + \eta' v + \zeta' w$ , 則  $g(y, y') = \beta \xi \xi' + \eta \zeta' + \eta' \zeta$ . 于是, 下面的向量

$$y_1 = u + v,$$

$$y_2 = u + \beta w,$$

$$y_3 = u + v + \beta w.$$

是两两正交, 并且适合  $g(y_i, y_i) = \beta$ . 故知, 如果用  $y_1$  代替原来的  $u_k$ , 并把这个向量仍旧叫做  $u_k$ , 則  $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} = y_2, u_{k+2} = y_3$  适合  $g(u_i, u_j) = \delta_{ij} \beta_i$ , 这里  $\beta_i \neq 0$ . 这証明了以下定理.

**定理 10.** 如果  $\Phi$  有特徵數 2, 而  $g(x, y)$  是  $\Phi$  上  $\Re$  里一个非交錯对称純量积, 則  $\Re$  有一个基存在, 关于这个基,  $g(x, y)$  的陣是一个对角陣<sup>1)</sup>.

用于証明前定理的論証指出: 陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是同步的. 另一方面, 这些子陣

1) 在这个定理里給出的典型形式是有用的, 因为它简化特征数 2 的域上对称陣的陣計算. 在特征数 2 的情形, 对称純量积的較多几何方面討論曾在狄佑当納著的关于典型羣的第 62 頁上指出.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

不是同步的, 这些观察指出: 威特定理在特征数为 2 的情形不成立。

## 第 六 章

### 欧几里得空間及单式空間

我們在本卷的开端曾指出欧几里得几何学是論述一个实向量空間关于純量积  $\sum_1^n \xi_i \eta_i$  的研究, 而純量积是通过互相正交的基单位向量把  $x, y$  列出如  $x = \sum \xi_i u_i, y = \sum \eta_i u_i$  所决定的. 因为这个純量积是固定的, 习惯上就只用  $(x, y)$  来表示, 以代替前章里的  $g(x, y)$ .  $(x, y)$  的几何意义是显然的, 它給出  $x$  及  $y$  間夹角的余弦与这两个向量的长度的积.  $x$  的长度也可由純量积列出, 即  $|x| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ .

从当前观点来說,  $(x, y)$  的特征性質是: 这个函数是正定的, 亦即对于所有  $x \neq 0, (x, x) > 0$ . 事实上, 近时常把欧几里得几何学公理化如次. 設  $\mathfrak{R}$  是实数域上有限維向量空間, 并在  $\mathfrak{R}$  里取一个正定的对称純量积  $(x, y)$ .  $\Phi$  上空間  $\mathfrak{R}$  并这个基本純量积构成欧几里得空間. 仿此, 我們定义与欧几里得空間相类似的复空間为复数域上一个向量空間, 并在这个空間里取一个正定的厄米特純量积. 我們在本章里研究这些空間的性質及在这些空間里某些特殊类型的綫性变换的性質. 我們还简单地論述陣(或綫性变换)的分析函数的理論.

**1. 笛卡儿基** 令  $\mathfrak{R}$  是一个欧几里得空間, 亦即  $\mathfrak{R}$  是实数域  $\Phi$  上一个  $n$  維向量空間, 并在其中定义一个正定的对称純量积  $(x, y)$ . 所以, 这个实值函数的根本性質是

$$\begin{aligned} (1) \quad & (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \\ & (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2), \\ (2) \quad & (\alpha x, y) = \alpha(x, y) = (x, \alpha y), \end{aligned}$$

$$(3) \quad (x, y) = (y, x),$$

$$(4) \quad (x, x) > 0 \quad (\text{如果 } x \neq 0).$$

但我們知道,如果  $(x, y)$  是实向量空間里任意对称純量积,則有一个基  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  存在使  $(u_i, u_j) = \delta_{ij}\beta_j$ , 这里  $\beta_i$  是 1, -1, 或 0. 如果  $(x, y)$  是正定的,显然每个  $\beta_i = 1$ . 故知  $\mathfrak{R}$  存在有一个基  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  使

$$(5) \quad (u_i, u_j) = \delta_{ij}.$$

所以,如果  $x = \sum \xi_i u_i$ ,  $y = \sum \eta_i u_i$ , 則得通常的

$$(x, y) = \sum \xi_i \eta_i.$$

适合(5)的基叫做欧几里得空間的笛卡儿基,拉格蘭日的决定这样一个基的方法可容許作某些改进如次. 令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的任意一个基,則  $(e_1, e_1) > 0$ . 所以,如果  $u_1 = (e_1, e_1)^{-\frac{1}{2}} e_1$ , 則  $(u_1, u_1) = 1$ , 次应用拉格蘭日的化簡法,并命

$$f_2 = e_2 - (e_2, u_1)u_1.$$

則  $(f_2, u_1) = (e_2, u_1) - (e_2, u_1)(u_1, u_1) = 0$ . 所以  $u_1$  及  $u_2 = (f_2, f_2)^{-\frac{1}{2}} f_2$  适合

$$(u_1, u_1) = 1 = (u_2, u_2), \quad (u_1, u_2) = 0 = (u_2, u_1).$$

今設曾經决定了  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  使  $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ , 并且在  $i \leq k$  时  $[u_1, u_2, \dots, u_i] = [e_1, e_2, \dots, e_i]$ . 令

$$f_{k+1} = e_{k+1} - (e_{k+1}, u_1)u_1 - (e_{k+1}, u_2)u_2 - \dots - (e_{k+1}, u_k)u_k,$$

則  $(f_{k+1}, u_i) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). 所以,如果命  $u_{k+1} = (f_{k+1}, f_{k+1})^{-\frac{1}{2}} f_{k+1}$ , 則  $(u_1, u_2, \dots, u_{k+1})$  适合对于  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  所說的条件. 重复这个方法直到得出  $\mathfrak{R}$  的笛卡儿基为止. 上面給出的“正交化”基  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的方法常叫做 E. 叔密特的正交化法.

这里值得一提的是:  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  关于  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的陣是三角陣;这因为,  $[u_1, u_2, \dots, u_i] = [e_1, e_2, \dots, e_i]$ . 所以  $u_i$  是  $e_i$  的綫性組合,这里  $j \leq i$ . 因此,  $u_i = \sum_{j=1}^i \tau_{ij} e_j$ , 而  $u$  关于  $e$  的陣是

$$(6) \quad (\tau) = \begin{bmatrix} \tau_{11} & & & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{bmatrix}.$$

如果  $(\beta)$  是  $(x, y)$  关于原来选定的基  $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$  的陣, 則知  $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$  的陣是  $(\tau)(\beta)(\tau)'$ . 另一方面, 由 (5) 知后者的陣應該是恆等陣; 所以有  $(\tau)(\beta)(\tau)' = 1$ .  $(\tau)$  的逆陣  $(\nu)$  也是三角陣与  $(\tau)$  的形状相同, 并且  $(\beta) = (\nu)(\nu)'$ . 这就証明了下面的定理.

**定理 1.** 令  $(\beta)$  是一个正定的对称純量積的陣, 則有一个三角陣  $(\nu)$  存在使  $(\beta) = (\nu)(\nu)'$ .

今讲述笛卡儿基与陣之間的关系. 令  $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$  是一定的笛卡儿基. 如果  $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$  是另一个这样的基, 則  $(x, y)$  关于这两个基的陣是 1. 所以, 如果  $(\sigma)$  是  $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$  关于  $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$  的陣, 則  $(\sigma)(\sigma)' = 1$ . 适合条件

$$(7) \quad (\sigma)(\sigma)' = 1$$

的陣叫做正交陣. 反过来, 如果  $(\sigma)$  是任意正交陣, 而  $u_i = \sum \sigma_{ij} v_j$ , 則  $(x, y)$  关于  $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$  的陣是  $(\sigma)1(\sigma)' = 1$ . 所以, 这些  $u$  构成一个笛卡儿基. 故知, 如果已知一个笛卡儿基, 則所有其他笛卡儿基可由施用正交陣于这个基而得出. 故笛卡儿基与正交陣之間有一个 1—1 对应.

如果  $(\sigma)$  是正交陣, 則  $(\det(\sigma))^2 = 1$ ; 所以,  $\det(\sigma) = \pm 1$ . 如果  $\det(\sigma) = 1$ , 就說  $(\sigma)$  是真正交陣; 否則說  $(\sigma)$  是假正交陣. 正交陣构成羣  $L(\Phi, n)$  的一个子羣  $O(\Phi, n)$  是容易驗証的. 真正交陣在  $O(\Phi, n)$  里构成一个不变子羣  $O_1(\Phi, n)$ , 而  $O_1$  在  $O$  里的指标是 2.

如果两个笛卡儿基由一个真正交陣联系着, 則說这两个基有同定向; 如果是由假正交陣联系着, 則說它們有反定向. 于是, 笛卡儿基对于一个特殊笛卡儿基可分为互不相容的两类, 就是与这个特殊基同定向及反定向两类. 改变一个向量的符号或施奇排列

于各向量則改变了定向.

再設  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是任意基, 并令  $(\gamma)$  是这个基关于笛卡儿基  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  的陣. 因为这些  $e$  构成一个任意基, 所以陣  $(\gamma)$  是  $L(\Phi, n)$  里一个任意陣. 但我們已知有一个笛卡儿基  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  存在, 它关于  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的陣是一个三角陣  $(\tau)$ ; 所以,  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  关于  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  的陣是积  $(\tau)(\gamma)$ . 因为  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  是笛卡儿基, 所以  $(\tau)(\gamma) = (\sigma)$  是正交陣. 故得下面的定理.

**定理 2.** 如果  $(\gamma) \in L(\Phi, n)$ , 这里  $\Phi$  是实数域, 則  $(\gamma)$  可分解为  $(\nu)(\sigma)$ , 这里  $(\nu)$  是三角陣, 而  $(\sigma)$  是正交陣.

### 習 題 47

1. 証明: 定理 2 里的陣  $(\nu)$  可取为有正对角元素的陣. 証明: 如果这样正規化后, 則  $(\nu)$  与  $(\sigma)$  可由  $(\gamma)$  唯一决定.

2. 分解

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为一个三角陣与一个正交陣的积.

3. 証明: 如果  $(\beta)$  是正定的对称純量积的陣, 則  $\det(\beta) > 0$ . 把这个結果推广, 用以証明  $(\beta)$  的每个对角子式是正的.

4. 証明: 如果  $(x, y)$  是一个正定的对称純量积, 則对于任意的  $u$  与  $v$  有  $(u, v)^2 \leq (u, u)(v, v)$ ; 并証明  $u$  与  $v$  是綫性相关时, 則等式成立.

5. 对于向量的长度証明三角形不等式:

$$(u+v, u+v)^{1/2} \leq (u, u)^{1/2} + (v, v)^{1/2}.$$

**2. 綫性变换与純量积** 如果  $A$  是  $\Phi$  上空間  $\mathfrak{R}$  到它自身內的一个綫性变换, 則  $g(x, y) = (xA, y)$  是空間里另一个純量积. 反过来, 令  $g(x, y)$  是  $\mathfrak{R}$  里任意純量积, 如果保持  $x$  固定, 則函数  $g(x, y)$  是  $y$  的綫性函数. 所以, 也象第五章里証明的,  $\mathfrak{R}$  里有唯一决定的向量  $xA$  存在, 使对于所有  $y$ ,  $g(x, y) = (xA, y)$ . 映照  $A$  是綫性的. 这指出:  $\mathfrak{R}$  里任意純量积可按上面方式使用一个綫性变换  $A$  而从基本純量积  $(x, y)$  得出. 故  $\mathfrak{R}$  里純量积理論等价于  $\mathfrak{R}$  里綫性变换理論.

此后我們大部分都采取綫性变换的观点, 首先讲到綫性变换  $A$  的关于  $(x, y)$  的折轉  $A'$  的定义:  $A'$  是  $\mathfrak{R}$  里綫性变换, 它对于  $\mathfrak{R}$  里所有的  $x, y$  适合条件

$$(8) \quad (x, yA') = (xA, y).$$

适合这个条件的綫性变换只有一个, 而且对于一个基  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ . (8) 可化为  $n^2$  个方程

$$(u_i, u_jA') = (u_iA, u_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

如果这个基是笛卡儿基, 則这些条件可推得  $A'$  是綫性变换, 它关于  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  的陣是  $A$  的陣的折轉. 如果

$$u_iA = \sum \alpha_{ik} u_k \quad \text{及} \quad u_jA' = \sum \beta_{jl} u_l,$$

則

$$(u_i, u_jA') = \sum \beta_{jl} (u_i, u_l) = \beta_{ji},$$

$$(u_iA, u_j) = \sum \alpha_{ik} (u_k, u_j) = \alpha_{ji}.$$

所以  $(\beta) = (\alpha)^{1)}$ .

我們知道, 映照  $A \rightarrow A'$  的基本代数性質是

$$(A + B)' = A' + B', \quad (AB)' = B'A'.$$

由 (8) 及  $(x, y)$  的对称性显然还有

$$A'' = A.$$

**3. 正交完全可約性** 如果  $\Theta$  是  $\mathfrak{R}$  的任意非零子空間, 則  $(x, y)$  是  $\Theta$  里非退化的純量积, 事实上, 如果  $x \neq 0$ , 則  $(x, x) \neq 0$ . 由此知,  $\Theta$  的正交余空間  $\Theta^\perp$  是一个真的余空間, 亦即  $\mathfrak{R} = \Theta \oplus \Theta^\perp$ <sup>2)</sup>. 我們容易决定  $\Theta^\perp$  的一个基. 要达到这个目的, 需要有  $\Theta$  的一个笛卡儿基  $(u_1, u_2, \dots, u_r)$ . 这个基可补充成为  $\mathfrak{R}$  的一个基  $(u_1, u_2, \dots, u_r; e_{r+1}, \dots, e_n)$ . 于是, 叔密特的正变化方法給出笛卡儿基  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , 并且显見  $\Theta^\perp = [u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n]$ .

今設  $\Omega$  是  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}$  里綫性变换的一个任意集合. 如果在  $\Omega$  下不变的任意子空間  $\Theta$  的正交余空間  $\Theta^\perp$  在  $\Omega$  下也是不变的, 則  $\Omega$  叫做 正交完全可約的. 因为  $\mathfrak{R} = \Theta \oplus \Theta^\perp$ , 所以从正交完全可約性显

1) 参看第五章, §4 的末段.

2) 参看第五章, §7.



然可推得通常完全可約性。我們將要知道,  $\mathfrak{R}$  里許多重要类型的綫性變換都具有这个性質。如果  $Q$  是正交完全可約的, 則可把  $\mathfrak{R}$  分解为关于  $Q$  不变与不可約的同时又是互相正交的子空間的直接和  $\mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_l$ 。故令  $\mathfrak{R}_1$  是关于  $Q$  的一个不可約的不变子空間, 則  $\mathfrak{R}_1^\perp$  是不变的, 而且  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_1^\perp$ 。令  $\mathfrak{R}_2$  是含于  $\mathfrak{R}_1^\perp$  里的一个不可約的不变子空間, 則  $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2$ 。这两个空間是正交的。于是, 我們可写  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus (\mathfrak{R} + \mathfrak{R}_2)^\perp$ 。这样繼續下去, 即得所求的分解。

这里有极有用的正交完全可約性檢驗法, 它是基于下面的定理。

**定理 3.** 如果  $Q$  是綫性變換的任意集合, 而  $\mathfrak{S}$  在  $Q$  下是不變的, 則正交余空間  $\mathfrak{S}^\perp$  在  $Q'$  下是不變的, 这里  $Q'$  是  $Q$  里綫性變換的折轉的集合。

証 令  $x \in \mathfrak{S}$  及  $y \in \mathfrak{S}^\perp$ , 則对于  $Q$  里任意的  $A$  有  $xA \in \mathfrak{S}$ 。于是  $(xA, y) = 0$ , 并且还有  $(x, yA') = 0$ 。因为这对于所有  $x \in \mathfrak{S}$  成立, 故  $yA' \in \mathfrak{S}^\perp$ 。因为  $y$  是  $\mathfrak{S}^\perp$  里任意向量, 这証明  $\mathfrak{S}^\perp$  在  $Q'$  下不变。

至此可述下面重要的判断准則:

**系.** 集合  $Q$  是正交完全可約的, 必須而且只須  $Q$  与  $Q'$  有相同的不變子空間。

**4. 对称、斜称及正交綫性變換** 欧几里得几何学里特別有趣的綫性變換有下面几种类型: 由条件  $A' = A$  来定义的对称變換, 由  $A' = -A$  来定义的斜称變換, 及由  $A' = A^{-1}$  来定义的正交變換。这些条件也可由相伴的純量积給出。譬如,  $A$  是对称的必須而且只須  $(xA, y)$  是对称的, 这是容易驗証的。同样,  $A$  是斜称的必須而且只須  $(xA, y)$  是  $\mathfrak{R}$  里斜称純量积。如果  $(\alpha)$  是  $A$  关于笛卡儿基  $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$  的陣, 則  $A$  是对称(斜称)的必須而且只須  $(\alpha)$  是对称(斜称)的。

要知道正交綫性變換的几何意义必須提到:  $(u, u)$  給出向量  $u$  的长度的平方, 条件  $AA' = 1 = A'A$  可推得

$$(9) \quad (uA, vA) = (u, uAA') = (u, u).$$

于是,  $A$  保持任意向量的长度不变. 今来证明逆定理, 亦即: 如果  $A$  是使每个向量的长度不变的任意线性变换, 则  $A$  是正交的. 这因为, 如果 (9) 对于所有  $u$  成立, 则对于所有的  $x$ , 与  $y$ ,

$$((x+y)A, (x+y)A) = (x+y, x+y).$$

展开后并把相等的项消掉, 得

$$2(xA, yA) = 2(x, y).$$

所以对于所有的  $x, y$ ,  $(x, yAA') = (x, y)$ . 因为  $(x, y)$  是非退化的, 这可推得  $AA' = 1$ .

$A$  是正交的显然必须而且只须它关于笛卡儿基的阵  $(\alpha)$  是正交的. 这个结果的另一个说法如次:  $A$  是正交的必须而且只须笛卡儿基  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  的变换  $(u_1A, u_2A, \dots, u_nA)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个笛卡儿基. 阵  $(\alpha)$  的行列式是 1 或  $-1$ . 在前一种情形,  $(u_1A, u_2A, \dots, u_nA)$  与  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  有同定向. 此时  $A$  叫做  $\mathfrak{R}$  里的旋转.

**5. 对称及斜称线性变换的典型阵** 如果  $\mathfrak{G}$  是在对称线性变换  $A$  下不变的一个子空间, 则  $\mathfrak{G}$  显然在  $A'$  下是不变的. 于是单独由  $A$  构成的集合是正交完全可约的. 故上面关于正交完全可约的集合的讨论提供求  $A$  的一个典型阵的下列方法.

令  $x$  是  $\mathfrak{R}$  里一个非零向量, 并令  $\mu_x(\lambda)$  是它的指导多项式<sup>1)</sup>. 如果  $\pi(\lambda)$  是  $\mu_x(\lambda)$  的一个不可约因子 (其首项系数是 1), 而  $\mu_x(\lambda) = \pi(\lambda)v(\lambda)$ , 则  $y = xv(A)$  有指导多项式  $\pi(\lambda)$ . 因为  $\mathfrak{Q}$  是实数域, 所以不可约多项式  $\pi(\lambda)$  是一次多项式或二次多项式. 今将证明:  $A$  的对称性保证  $\pi(\lambda)$  是一次的. 否则,  $(y, yA)$  是循环空间  $\{y\}$  的一个基, 而这个基产生阵

$$(10) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

这里,  $\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = \pi(\lambda)$ . 另一方面, 如果在  $\{y\}$  里选一个笛卡

1) 参看第三章, §2.

儿基,則得  $\{y\}$  里  $A$  的一个对称陣

$$(11) \quad \begin{bmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

因为(10)与(11)是相似陣,故

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = \lambda^2 - (\gamma + \varepsilon)\lambda + (\gamma\varepsilon - \delta^2).$$

这个二次式的判別式是

$$(\gamma + \varepsilon)^2 - 4(\gamma\varepsilon - \delta^2) = (\gamma - \varepsilon)^2 + 4\delta^2 \geq 0,$$

这与  $\pi(\lambda)$  的不可約性矛盾. 故知  $\pi(\lambda)$  必定是一次的,因此  $\{y\} = [y]$  是一維空間,而  $yA = \rho y$ .

今以长度为 1 的向量  $y_1$  的倍数代替  $y$ , 則  $y_1A = \rho_1 y_1$ , 而  $\rho_1 \equiv \rho$ . 又  $\mathfrak{R} = [y_1] \oplus [y_1]^\perp$ , 而  $A$  在  $[y_1]^\perp$  里导出一个对称变换. 所以,我們在  $[y_1]^\perp$  里可找长度为 1 的一个  $y_2$ , 使  $y_2A = \rho_2 y_2$ . 其次,用分解  $\mathfrak{R} = [y_1, y_2] + [y_1, y_2]^\perp$  在  $[y_1, y_2]^\perp$  里找长度为 1 的一个  $y_3$ , 使  $y_3A = \rho_3 y_3$ . 我們知道,这样得来的  $y_i$  是两两正交的;故在进行終止时,就得到一个笛卡儿基  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . 由这个基所决定的  $A$  的陣是

$$(12) \quad \text{diag} \{ \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n \}.$$

如果回忆到从一个笛卡儿基过渡到另一个笛卡儿基的陣是一个正交陣,則知下面的定理是成立的.

**定理 4.** 如果  $(\alpha)$  是一个实对称陣,則有一个实正交陣  $(\sigma)$  存在使  $(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$  是一个对角陣.

我們还可安排使  $(\sigma)$  是真正交陣. 这可由在必要时改变  $y_i$  中的一个向量的符号而实现. 我們还知道典型陣 (12) 里的  $\rho_i$  是这个陣的特征多項式的根. 所以,它們也是  $(\alpha)$  的特征多項式的根. 因此很湊巧地証明了下面的系.

**系.** 实对称陣的特征根都是实数.

今来叙述欧几里得空間里斜称綫性变换的理論. 令  $A$  是斜称綫性变换,并且与上面一样,令  $y$  是一个非零向量,它的指导多項式是一个不可約多項式  $\pi(\lambda)$ . 如果  $\pi(\lambda)$  是一次的,則  $yA = \rho y$ . 于是,  $\rho(y, y) = (yA, y) = -(y, yA) = -\rho(y, y)$ , 而这可推



$$(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

求一个真正交陣  $(\sigma)$  使  $(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$  为对角的.

2. 証明: 如果  $g(x, y)$  是欧几里得空間里一个对称純量积, 則有  $\mathfrak{R}$  的一个笛卡儿基存在使  $g$  关于这个基的陣是对角陣.

3. 証明: 如果  $(\alpha)$  是  $p$  級的一个实对称陣或斜称陣, 則  $(\alpha)$  里有一个非零的  $p$ -行对角子式存在.

**6. 交換的对称及斜称綫性变換** 如果  $\rho$  是对称綫性变換  $A$  的特征多項式  $f(\lambda)$  的一个根, 則使  $yA = \rho y$  的向量  $y$  的子空間  $\mathfrak{R}_{\lambda=\rho} \neq 0$ ; 这个子空間叫做对应于  $f(\lambda)$  的根  $\rho$  或因子  $\lambda - \rho$  的特征空間. 如果  $A$  是斜称的, 而  $\lambda$  是  $f(\lambda)$  的一个因子, 則也仿此定义特征空間  $\mathfrak{R}_\lambda$ .  $f(\lambda)$  的其它不可約因子的形状为  $\pi(\lambda) = \lambda^2 + \delta^2$ , 这里  $\delta \neq 0$ ; 对应于这样一个因子, 我們定义特征空間  $\mathfrak{R}_{\pi(\lambda)}$  为使  $y\pi(A) = 0$  的向量  $y$  的全体. 在前节里已知  $\mathfrak{R}_{\pi(\lambda)} \neq 0$ .

如果  $B$  是与  $A$  可交換的任意綫性变換, 显然  $B$  把  $A$  的每个特征空間映到它自身内. 这因为, 由  $y\pi(A) = 0$  显然可推得  $y\pi(A)B = (yB)\pi(A) = 0$ .<sup>1)</sup>

今令  $\mathcal{Q}$  是綫性变換的一个集合, 它具有这样的性質: 1)  $\mathcal{Q}$  里任意两个綫性变換都是可交換的, 2)  $\mathcal{Q}$  里每个变換或是对称的, 或是斜称的. 要决定集合  $\mathcal{Q}$  的典型陣, 先考虑  $\mathcal{Q}$  是一个不可約集合的情形. 我們要建立的結果是下面的定理.

**定理 6.** 如果欧几里得空間  $\mathfrak{R}$  关于交換的对称或斜称綫性变換的集合是不可約的, 則  $\dim \mathfrak{R} \leq 2$ .

証. 令  $\pi(\lambda)$  是任意  $A \in \mathcal{Q}$  的特征多項式的一个不可約因子, 則  $A$  的特征空間  $\mathfrak{R}_{\pi(\lambda)}$  关于  $\mathcal{Q}$  是不变的. 所以,  $\mathfrak{R}_{\pi(\lambda)} = \mathfrak{R}$ ; 因此  $\pi(A) = 0$ . 如果  $A$  是对称变換, 則知  $\pi(\lambda) = \lambda - \rho$ ; 故在这个情形,  $A$  是一个純量乘法. 如果  $A$  是斜称变換, 則或是  $\pi(\lambda) = \lambda$ , 此时  $A = 0$ ; 或是  $\pi(\lambda) = \lambda^2 + \delta^2$  (这里  $\delta \neq 0$ ) 此时  $A^2 = -\delta^2 1$ , 于是,  $A^{-1}$  存在, 并且是斜称变換. 所以, 如果  $B$  是集合里任意其

1) 这里出現的观念的更一般形状已在第四章的 § 9 里討論过.

它斜称变换, 則

$$M = BA^{-1} = A^{-1}B = (-A^{-1})'(-B') = (A^{-1})'B' = M'$$

是对称变换. 因为  $M$  与  $\mathcal{Q}$  里每个元素可交换, 所以, 前面使用的論証指出  $M$  是一个純量乘法. 于是,  $B = \mu A$ . 故知集合  $\mathcal{Q}$  或是只由純量乘法构成, 或是由純量乘法及这个集合里单一斜称变换  $A$  的倍数构成. 在前者情形,  $\mathfrak{R}$  的每个子空間关于  $\mathcal{Q}$  是不变的; 所以, 由  $\mathfrak{R}$  的不可約性得  $\dim \mathfrak{R} = 1$ . 在后者情形, 可求一个二維子空間, 它关于选定的斜称变换  $A$  是不变的, 并且是不可約的. 显然这个空間关于  $\mathcal{Q}$  里每个元素也是不变的. 所以, 此时有  $\dim \mathfrak{R} = 2$ . 这就完成了定理的証明.

今設  $\mathcal{Q}$  是欧几里得空間里交换的对称或斜称綫性变换的一个任意集合. 由定理 3 的系显然知, 对称及斜称綫性变换的每个集合是正交完全可約的. 由此推得: 我們可記  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{S}_r$ , 这里  $\mathfrak{S}_i$  是互相正交的, 并且关于  $\mathcal{Q}$  是不可約的与不变的. 至此可应用定理 6 以推出: 空間  $\mathfrak{S}_i$  是一維或二維的. 再則, 定理 6 的証明指出: 对称綫性变换  $A$  是  $\mathfrak{S}_i$  里純量乘法, 而斜称綫性变换  $A$  是一个特殊斜称变换的倍数. 如果在  $\mathfrak{S}_i$  里选取笛卡儿基, 則得  $\mathfrak{R}$  的一个笛卡儿基,  $\mathcal{Q}$  里所有  $A$  关于这个基的陣都具

$$(14) \quad \begin{bmatrix} (\beta_1) & & & \\ & (\beta_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\beta_r) \end{bmatrix}$$

的形状, 这里  $(\beta_i)$  是一行或二行純量陣, 或是

$$(15) \quad (\beta_i) = \begin{bmatrix} 0 & s_i \\ -s_i & 0 \end{bmatrix}.$$

就陣方面來說, 我們的結果是下面的定理.

**定理 7.** 令  $\omega$  是可交换的对称或斜称的实陣的集合, 則有一个实正交陣  $(\sigma)$  存在使对于每个  $(\alpha) \in \omega$ ,  $(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$  的形状为 (14),

#### 習 題 49

1. 証明: 如果  $A$  是对称綫性变换, 則  $A$  的任意两个不同的特征空間是正交的; 并

証明： $\mathfrak{R}$  是关于  $A$  的特征子空間的直接和。

2. 証明：如果  $\omega$  是可交換的实对称陣的集合，則有一个实对称陣  $(\delta)$  存在，使每个  $(\alpha) \in \omega$  是  $(\delta)$  里一个多項式。

**7. 正規及正交綫性变换** 如果一个綫性变换  $A$  可与它的折轉变换交換，則  $A$  叫做正規綫性变换。这种映照的特殊情形是对称、斜称及正交綫性变换。如果  $A$  是任意綫性变换，則可写成

$$A = \frac{1}{2} (A + A') + \frac{1}{2} (A - A') = B + C,$$

这里  $B = \frac{1}{2} (A + A')$  是对称綫性变换，而  $C = \frac{1}{2} (A - A')$  是斜称綫性变换。这种分解为对称与斜称部分的分解法是唯一的；这是因为，如果  $B + C = B_1 + C_1$ ，这里  $B_1' = B_1$  而  $C_1' = -C_1$ ，則

$$(B - B_1) = (C_1 - C),$$

因为  $B - B_1$  是对称的，而  $C_1 - C$  是斜称的，所以  $B - B_1 = 0 = C_1 - C$ 。所以，我們可分別叫  $B$  与  $C$  做  $A$  的对称部分与斜称部分。現在要講的是： $A$  是正規綫性变换必須而且只須  $B$  与  $C$  可交換，这

因为  $B = \frac{1}{2} (A + A')$ ， $C = \frac{1}{2} (A - A')$  而  $A = B + C$ ， $A' = B - C$  的緣故。这个說明指出：我們可应用可交換的对称及斜称綫性变换来研究正規綫性变换。使用这个方法可知有一个笛卡儿基存在，关于这个基  $B$  与  $C$  的陣的形状是(14)，因为  $B$  是对称的，而  $C$  是斜称的，故知：如果  $(\beta_i)$  是一行的陣块，則  $C$  的陣是 0；如果  $(\beta_i)$  是两行的陣块，則  $C$  的陣的形状是(15)，而  $B$  的陣是純量陣。  $A = B + C$  的陣是  $B$  的陣与  $C$  的陣之和。所以， $A$  的陣的形状是(14)，这里每个  $(\beta_i)$  是一行的或

$$(16) \quad (\beta_i) = \begin{bmatrix} \rho_i & \varepsilon_i \\ -\varepsilon_i & \rho_i \end{bmatrix},$$

这里  $\varepsilon_i \neq 0$ 。

如果一个陣可与它的折轉陣交換，則叫做正規陣。綫性变换  $A$  是正規的必須而且只須它关于笛卡儿基的陣是正規的。故由上面的討論得下面的定理。

**定理 8.** 如果  $(\alpha)$  是一个实正规阵, 则有一个正交阵  $(\sigma)$  存在使  $(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$  的形状为 (14), 这里每个  $(\beta_i)$  是一行的或是形状如 (16) 的二行阵.

最后叙述正交变换的特殊情形. 这里一行阵块  $(\beta_i)$  伴着向量  $y_i \neq 0$  使  $y_i A = \beta_i y_i$ . 因为  $A$  不改变向量的长度, 故  $\beta_i = \pm 1$ . 又  $A$  在二维子空间  $\mathfrak{S}_i$  里是正交线性变换, 所以阵块 (16) 是正交阵. 故

$$\begin{bmatrix} \rho_i & \epsilon_i \\ -\epsilon_i & \rho_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_i & -\epsilon_i \\ \epsilon_i & \rho_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这就化为单一条件

$$(17) \quad \rho_i^2 + \epsilon_i^2 = 1.$$

我们可决定一个  $\theta_i$  使  $\cos \theta_i = \rho_i$ ,  $\sin \theta_i = \epsilon_i$ ; 于是, (16) 化为

$$(18) \quad \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}.$$

**定理 9.** 每个实正交阵在正交阵羣里与一个阵 (14) 共轭, 此时  $(\beta_i)$  是一行阵 ( $\pm 1$ ) 或是形状 (18) 的阵.

### 習 題 50

1. 証明: 一个正交线性变换是真的或假的按特征多项式的根  $-1$  的重根数是偶数或奇数而定.

2. 証明: 如果  $A$  在奇数维欧几里得空间里是一个旋轉, 则有使  $uA = u$  的非零向量  $u$  存在.

3. 証明: 正交线性变换的每个集合是正交完全可约的.

4. 証明: 如果  $O$  是正交线性变换, 它没有  $-1$  的特征根, 则  $S = (O - 1)(O + 1)^{-1}$  是斜称变换, 而  $O = (1 + S)(1 - S)^{-1}$ . 証明: 如果  $O$  是正交线性变换, 而  $1$  不是它的特征根, 则  $S = (O + 1)(O - 1)^{-1}$  是斜称变换, 而  $O = (S + 1)(S - 1)^{-1}$ .

**8. 半定变换** 如果一个线性变换  $A$  是对称的, 并且相伴的对称双线性形式  $(xA, y)$  是正定的, 则  $A$  說是正定变换.  $(xA, y)$  是正定的意思是說: 对于所有  $x \neq 0$ ,  $(xA, x) > 0$ . 这个概念可稍加推广为: 如果对于所有  $x$ ,  $(xA, x) \geq 0$ , 則說  $A$  是(非負的)半定变换. 由这个定义可見: 正定变换是半定变换并且是 1—1 的. 逆定理也成立, 这可由下面关于正定性与半定性的判断准则得出.

**定理 10.** 对称变换  $A$  是正定的 (半定的) 必須而且只須它的



特征根都是正(非負)數.

証 我們知道,  $\mathfrak{R}$  有一个笛卡儿基  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  存在使每个  $y_i$  是一个特征向量, 亦即  $y_i A = \rho_i y_i$ , 这里  $\rho_i$  是特征根. 但  $(y_i A, y_i) = (\rho_i y_i, y_i) = \rho_i (y_i, y_i)$  与  $\rho_i$  同号. 所以, 如果  $A$  是正定(半定)的, 則每个  $\rho_i$  是正(非負)的. 反过来, 設对于所有  $i$ ,  $\rho_i > 0$  ( $\geq 0$ ), 并写  $x = \sum \xi_i y_i$ , 則

$$\begin{aligned} (xA, x) &= \left( \sum_1^n \xi_i y_i A, \sum_1^n \xi_i y_i \right) \\ &= \left( \sum_1^n \xi_i \rho_i y_i, \sum_1^n \xi_i y_i \right) \\ &= \sum_1^n \rho_i \xi_i^2. \end{aligned}$$

如果所有  $\rho_i$  都是  $> 0$ , 則除非每个  $\xi_i = 0$ , 它必定  $> 0$ . 所以,  $\rho_i > 0$  保证了正定性. 如果  $\rho_i \geq 0$ , 則显然也有  $(xA, x) \geq 0$ .

如果  $A$  是 1—1 变换, 則 0 不是  $A$  的特征根. 所以, 如果  $A$  是半定的并且是 1—1 的, 則  $A$  的所有特征根都是正数; 故由定理 10 知:  $A$  是正定的.

如果  $A$  是欧几里得空間里一个任意綫性变换, 則因为  $(xB, x) = (xA A', x) = (xA, xA) \geq 0$ . 故  $B = A A'$  是半定变换. 我們还知:  $B$  与  $A$  有相同的实空間; 这因为, 如果  $zA = 0$ , 显然有  $zB = 0$ . 反过来, 如果  $zB = 0$ . 則  $0 = (zB, z) = (zA, zA)$ , 故可推得  $zA = 0$ . 这个說明的一个推論为:  $B$  是正定的必須而且只須  $A$  是 1—1 变换.

今証下面有用的結果:

**定理 11.** 任意半定变换  $B$  有一个半定平方根  $P$  (亦即  $P^2 = B$ ), 并且  $P$  是唯一的.

証 决定半定变换  $P$  使  $P^2 = B$  是不难的. 我們选一个笛卡儿基  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  使  $y_i B = \rho_i y_i$ , 并且知都是  $\rho_i \geq 0$ . 于是, 可定义  $P$  为使  $y_i P = \rho_i^{1/2} y_i$  的綫性变换. 显然,  $P^2 = B$ . 又因为  $P$  关于一个笛卡儿基的陣是对称的; 所以,  $P$  是对称变换. 最后, 因

为  $P$  的特征根  $\rho_i^{1/2}$  是非負的, 故  $P$  是半定变换. 要証  $P$  的唯一性, 可把  $B$  的特征向量編組, 使为首  $n_1$  个特征向量都是属于  $\rho_1$ , 其次  $n_2$  个特征向量都是属于  $\rho_2 (\neq \rho_1)$ , 仿此类推. 我們还引入空間

$$\mathfrak{R}_1 = [y_1, y_2, \dots, y_{n_1}],$$

$$\mathfrak{R}_2 = [y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \dots, y_{n_1+n_2}], \dots,$$

則  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_h$  (这里  $h =$  不同的特征根的个数). 如果  $u_i$  是  $\mathfrak{R}_i$  里任意向量, 显然  $u_i B = \rho_i u_i$ . 另一方面, 令  $u = u_1 + u_2 + \dots + u_h$ , 这里  $u_i \in \mathfrak{R}_i$  是属于根  $\rho_i$  的任意特征向量, 亦即  $uB = \rho_i u$ , 則

$$\begin{aligned} \rho_i u &= uB = (u_1 + u_2 + \dots + u_h)B \\ &= u_1 B + u_2 B + \dots + u_h B \\ &= \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + \dots + \rho_h u_h. \end{aligned}$$

于是, 如果  $j \neq i$ , 則  $u_j = 0$  而  $u = u_i \in \mathfrak{R}_i$ . 故知空間  $\mathfrak{R}_i$  恰是  $\mathfrak{R}$  的与  $B$  的特征根  $\rho_i$  对应的特征子空间. 我們已知, 綫性变换  $B$  的特征子空間对于与  $B$  可交换的任意綫性变换  $C$  是不变的. 如果  $P$  是任意綫性变换能使  $P^2 = B$ , 則  $BP = PB$ , 而  $\mathfrak{R}_i P \subseteq \mathfrak{R}_i$ . 所以, 如果  $P$  是半定变换, 則  $P$  在每个  $\mathfrak{R}_i$  里可导出一个半定变换. 但我們可找得  $\mathfrak{R}_i$  的一个笛卡儿基  $(w_1^{(i)}, w_2^{(i)}, \dots, w_{n_i}^{(i)})$  使  $w_j^{(i)} P = \gamma_j w_j^{(i)}$ . 所以  $w_j^{(i)} B = w_j^{(i)} P^2 = \gamma_j^2 w_j^{(i)}$ . 于是,  $\gamma_j^2 = \rho_i$ , 而  $\gamma_j = \rho_i^{1/2}$ . 这証明:  $P$  在空間  $\mathfrak{R}_i$  里与  $\rho_i^{1/2}$  的純量乘法重合. 所以,  $P$  是我們前此作出的映照.

### 習 題 51

1. 証明: 如果  $A$  是任意对称变换, 它的負特征根的重根数是偶数, 則  $A$  有一个平方根.
2. 証明: 任意对称变换  $A$  有一个唯一的对称立方根.

**9. 任意綫性变换的极因子分解** 任意实数显然可写为一个非負实数与 1 或 -1 之积; 这个結果可推广到欧几里得空間里的綫性变换, 如次:

**定理 12.** 欧几里得空間里每个綫性变换  $A$  可寫为積  $A = PO$ , 这里  $P$  是半定变换, 而  $O$  是正交变换.  $P$  是唯一决定的, 而  $O$  是唯

一的必須而且只須  $A$  是 1—1 變換。

証 在  $A$  是 1—1 的这个重要情形下，証明是較為簡單的；所以我們先考慮这个情形。我們作正定變換  $B = AA'$  及它的正定平方根  $P$ ，令  $O = P^{-1}A$ ，則

$$OO' = P^{-1}AA'P^{-1} = P^{-1}BP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = 1,$$

這証明  $O$  是正交變換，因為  $A = PO$ ，表示式的存在可由  $A$  是 1—1 的來証實。

在一般情形的証明的基础与前此相同。我們仍定義  $B = AA'$ ，並取  $P$  為  $B$  的半定平方根。我們的工作是決定一個正交變換  $O$  使  $A = PO$ 。我們先用  $xP \rightarrow xA$  定義空間  $\mathfrak{S} = \Re P$  到空間  $\mathfrak{S}_1 = \Re A$  內的一個映照，如果  $xP = yP$ ，則  $(x - y)P = 0$ ，故  $(x - y)B = 0$ 。因為  $B = AA'$ ，故推得  $(x - y)A = 0$ ，從而  $xA = yA$ 。這指出上面的對應是單值的，顯然它是綫性的。這個映照還保持向量的長度不變；這因為

$$(xA, xA) = (xAA', x) = (xB, x),$$

而

$$(xP, xP) = (xP^2, x) = (xB, x).$$

今  $A, B$  及  $P$  有相同的腦空間；所以，它們有相同的秩。故正交余空間  $\mathfrak{S}^\perp$  與  $\mathfrak{S}_1^\perp$  有相同維數  $= h$ 。今令  $(u_1, u_2, \dots, u_h), (v_1, v_2, \dots, v_h)$  是這兩個空間的笛卡兒基，則  $\mathfrak{S}^\perp$  到  $\mathfrak{S}_1^\perp$  內的綫性變換，它把  $u_i$  映到  $v_i$ ，保持向量的長度不變。故映照

$$O: xP + \sum \alpha_i u_i \rightarrow xA + \sum \alpha_i v_i$$

是一個正交變換。顯然， $xPO = xA$  對於所有  $x$  成立，故  $A = PO$ 。

如果  $A = PO$ ，則  $AA' = P^2$ ，所以， $P$  必須是半定變換  $B = AA'$  的一個平方根。於是， $P$  是唯一的。如果  $A$  是 1—1 的，則  $O = P^{-1}A$  也是唯一的。反過來，如果  $A$  不是 1—1 的，則在上面記法里  $h > 0$ 。此時，從  $\mathfrak{S}^\perp$  到  $\mathfrak{S}_1^\perp$  內的可用變換有多種選法，這就決定不同的正交變換  $O$ 。這完成了定理的証明。

仿此，可作出因子分解  $A = O_1 P_1$ ，這里  $O_1$  是正交變換，而  $P_1$  是半定變換。這也可由應用定理 12 于  $A'$  而導出。

## 1. 分解

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

为一个正定阵与一个正交阵的积.

2. 証明:  $A = PO$  是正规的必須而且只須  $PO = OP$ .

**10. 单式几何学** 单式几何学是关于复数域上一个向量空間結連一个正定厄米特純量积  $(x, y)$  的研究. 就出发点來說, 这个几何学显然具有欧几里得几何学的各特征; 但另一方面由于它的基域是代数閉域, 故可望有某些簡化, 象典型陣的理論就比实数域情形为簡單. 我們无需詳細地重复上面的討論, 只把主要的結果述出, 并且也只在有新的方法能够把在欧几里得情形下的証明簡化时才給出証明.

今設  $\Phi$  是复数域, 而  $(x, y)$  是关于通常映照  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  的一个厄米特純量积, 則对于任意  $x$ ,  $(x, x)$  是实数. 我們將假定  $(x, y)$  是正定的; 亦即,  $x \neq 0$  时  $(x, x) > 0$ . 由这个假定可推得: 有一个基  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  存在, 它是单式基, 亦即能使  $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). 由一个单式基过渡到另一个单式基的陣  $(\sigma)$  是一个单式陣; 亦即, 能使

$$(\sigma)(\bar{\sigma})' = 1 = (\bar{\sigma})'(\sigma).$$

这些陣組成  $L(\Phi, n)$  的单式子羣  $U(\Phi, n)$ , 这里  $\Phi$  是复数域. 叔密特的正交化方法仍能成立, 且使我們能够把 § 1 的所有結果轉移为当前情形的結果. 定理 1 的类似定理是: 如果  $(\beta)$  是正定厄米特純量积的陣, 則  $(\beta)$  可写成  $(v)(\bar{v})'$  形状, 这里  $(v)$  是适当的复数元素的三角陣. 定理 2 的类似定理可由以“复数”代替“实数”及以“单式”代替“正交”而得.

綫性变换  $A$  的折轉變換与通常的定义一样. 如果  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  是一个单式基, 則  $A'$  的陣是  $A$  的陣的共軛折轉陣  $(\bar{\alpha})'$ . 故  $A$  是厄米特变换, 亦即  $A' = A$ , 必須而且只須  $(\alpha)$  是厄米特陣;  $A$  是斜厄米特变换, 亦即  $A' = -A$ , 必須而且只須  $(\alpha)$  是斜厄米特陣;

$A$  是单式变换, 亦即  $A'A=1=A A'$ , 必須而且只須  $(\alpha)$  是单式陣;  
 $A$  是正規变换, 亦即  $A A'=A' A$ , 必須而且只須  $(\alpha)(\bar{\alpha})'=(\bar{\alpha})'(\alpha)$ .  
 这里要指出: 如果  $A$  是斜厄米特变换, 則  $iA$  ( $i^2=-1$ ) 是厄米特变换. 这因为, 純量乘法  $x \rightarrow \mu x$  的折轉变换是純量乘法  $x \rightarrow \bar{\mu}x$ . 所以  $x \rightarrow ix$  是斜厄米特变换; 又因为它与  $A$  可交换, 故  $iA$  是厄米特变换. 因此, 斜厄米特变换的理論可化为厄米特变换的理論, 而无須另外討論.

今設  $A$  是厄米特变换, 并令  $\rho$  是特征多項式的一个根, 令  $y$  是一个对应的特征向量, 則

$$\begin{aligned}\rho(y, y) &= (\rho y, y) = (yA, y) = (y, yA) \\ &= (y, \rho y) = (y, y)\bar{\rho}.\end{aligned}$$

因为  $(y, y) \neq 0$ , 可推得  $\bar{\rho} = \rho$  是实数. 我們把  $y$  正規化以得使  $(y_1, y_1) = 1$  的向量  $y_1$ , 則也有  $y_1 A = \rho_1 y_1$ , 而  $\rho = \rho_1$ . 如果  $\mathfrak{S}$  是任意子空間, 而对于所有  $y \in \mathfrak{S}$  能使  $(y, y') = 0$  的向量  $y'$  构成的正交余空間記作  $\mathfrak{S}^\perp$ , 則这个空間是  $\mathfrak{S}$  的一个余空間; 并且, 如果  $\mathfrak{S}$  在  $A$  下不变, 則  $\mathfrak{S}^\perp$  在  $A$  下也不变. 如果把这个注解应用到  $\mathfrak{S} = [y_1]$ , 則知  $\mathfrak{R} = [y_1] \oplus [y_1]^\perp$ , 而  $[y_1]^\perp A \subseteq [y_1]^\perp$ . 于是, 可找出一个实数  $\rho_2$  及  $[y_1]^\perp$  里一个向量  $y_2$  使  $y_2 A = \rho_2 y_2$ . 次写  $\mathfrak{R} = [y_1, y_2] \oplus [y_1, y_2]^\perp$ , 而对  $[y_1, y_2]^\perp$  重复这样論証. 最后就得一个单式基, 使  $A$  关于这个基的陣是

$$\text{diag} \{ \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n \},$$

这里  $\rho_i$  都是实数.

**定理 13.** 如果  $(\alpha)$  是一个复厄米特陣, 則有一个單式陣  $(\sigma)$  存在, 使  $(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$  是一个实对角陣.

对于斜厄米特陣的类似結果显然也成立. 其次也象欧几里得情形一样, 我們可証: 如果  $\omega$  是可交换的厄米特陣及斜厄米特陣的一个集合, 則有單一的单式陣  $(\sigma)$  存在, 使对于每个  $(\alpha) \in \omega$ ,  $(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$  是对角陣. 这也与前此一样, 导致关于正規陣方面(而結果也是关于单式陣方面)与定理 13 相应的定理, 只是删去“实”字. 单式陣的特征根的絕對值是 1; 这因为, 如果  $yA = \rho y$ , 則

$$|\rho|^2(y, y) = (yA, yA) = (y, y).$$

关于单式陣的主要定理，可使用在厄米特陣上用过的論証来直接导出。論証的关键在于：如果  $\mathfrak{S}$  是单式变换下一个不变子空間，則正交余空間  $\mathfrak{S}^\perp$  也是不变的。

如果  $A$  是一个厄米特綫性变换，則相伴的双綫性形式  $(xA, y)$  是厄米特形式；这因为

$$(yA, x) = (y, xA) = \overline{(xA, y)}.$$

故  $(xA, x)$  对于任意的  $x$  是实数。如同在欧几里得情形，如果对于所有  $x \neq 0$ ,  $(xA, x) > 0$  ( $\geq 0$ )，則  $A$  叫做正定(半定)的厄米特綫性变换。在欧几里得情形所作的討論可以不用改变而移到当前情形。譬如，我們可証：任意半定变换有一个唯一的平方根。也与前面一样，这可用以建立极因子分解。单式空間里每个綫性变换  $A$  可写成  $A = PU$ ，这里  $P$  是半定变换而  $U$  是单式变换， $P$  是唯一决定的，而  $U$  是唯一的必須而且只須  $A$  是 1—1 变换。

今將証可用于单式空間里任意綫性变换及陣的另一个定理，这就是下面的定理。

**定理 14.** 如果  $(\alpha)$  是复元素的陣，則有一个單式陣  $(\sigma)$  存在使  $(\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1}$  是三角陣。

証 要証这个定理，令  $A$  是綫性变换，它关于某单式基  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  的陣是給定的陣  $(\alpha)$ 。如果  $\rho_1$  是一个特征根，則有一个向量  $y_1$  存在使  $(y_1, y_1) = 1$ ，并且  $y_1 A = \rho_1 y_1$ 。我們可找到含有向量  $y_1$  的一个单式基  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 。因为  $y_1 A = \rho_1 y_1$ ，所以  $A$  关于这个基的陣是

$$(19) \quad (\beta) = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{bmatrix}.$$

如果  $(\mu)$  是  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  关于  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  的陣，則  $(\mu)$  是单式陣，而  $(\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}$  是 (19) 的陣  $(\beta)$ 。今可設有  $(n-1)$  行及列的单式陣  $(v)$  存在使

$$(\nu) \begin{bmatrix} \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{bmatrix} (\nu)^{-1} = \begin{bmatrix} \rho_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \rho_n \end{bmatrix},$$

則陣  $(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\nu) \end{bmatrix}$  是單式陣, 而

$$(\tau)(\beta)(\tau)^{-1} = (\sigma)(\alpha)(\sigma)^{-1} = \begin{bmatrix} \rho_1 & & 0 \\ & \rho_2 & \\ * & & \ddots \\ & & & \rho_n \end{bmatrix},$$

这里  $(\sigma) = (\tau)(\mu)$  是單式陣.

### 習 題 53

1. 証明: 定理 14 对于可交換的复陣的任意集合  $\omega$  成立.
2. 在实数情形, 定理 14 的类似定理是什么?
3. 証明: 三角陣是正規的必須而且只須它是对角陣. 使用这个結果証明: 关于复数元素的正規陣的典型形式的定理.

**11. 綫性变换的分析函数** 我們將取陣序列的收斂性概念作为陣問題上分析論述的出发点. 如果  $\{(\alpha^{(k)})\} (k = 1, 2, 3, \cdots)$  是  $\Phi_n$  里的陣的一个无限序列, 这里  $\Phi$  是复数域. 如果对于每个  $i, j = 1, 2, \cdots, n$ , 复数序列  $\alpha_{ij}^{(k)} \rightarrow \alpha_{ij}$ , 則說  $\{(\alpha^{(k)})\}$  收斂于  $(\alpha)$ , 記作  $(\alpha^{(k)}) \rightarrow (\alpha)$ . 极限陣  $(\alpha)$  是唯一的; 这因为复数序列的极限是这样的. 使用这个收斂性定义, 显然陣的加法与乘法是連續函数; 亦即, 如果  $(\alpha^{(k)}) \rightarrow (\alpha)$  而  $(\beta^{(k)}) \rightarrow (\beta)$ , 則

$$(20) \quad (\alpha^{(k)}) + (\beta^{(k)}) \rightarrow (\alpha) + (\beta),$$

$$(21) \quad (\alpha^{(k)})(\beta^{(k)}) \rightarrow (\alpha)(\beta).$$

要認識这些基本法則的眞实性, 只須知道两个陣的和(积)的  $(i, j)$  元素是  $2n^2$  个元素  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  的連續函数. (21) 的一个重要特殊情形是: 如果  $(\alpha^{(k)}) \rightarrow (\alpha)$  而  $(\mu)$  是滿秩陣, 則

$$(22) \quad (\mu)(\alpha^{(k)})(\mu)^{-1} \rightarrow (\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}.$$

上面这个結果可用以定义綫性变换的收斂性. 令  $\{A_k\} (k = 1, 2, \cdots)$  是  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}$  里綫性变换的一个无限序列, 并令  $(\alpha^{(k)})$  是  $A_k$  关于  $\mathfrak{R}$  的一个基  $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$  的陣; 如果  $(\alpha^{(k)}) \rightarrow (\alpha)$ , 这

里 $(\alpha)$ 是 $A$ 的陣,則說 $\{A_k\}$ 收斂于綫性變換 $A$ ,記作 $A_k \rightarrow A$ .由(22)知,条件 $A_k \rightarrow A$ 与 $\mathfrak{R}$ 的基的选取无关.

今將論述綫性變換的幂級數,也与普通級數一样,如果

$$(23) \quad \gamma_0 1 + \gamma_1 A + \gamma_2 A^2 + \cdots, \quad (\gamma_i \in \Phi)$$

的部分和

$$S_k = \gamma_0 1 + \gamma_1 A + \gamma_2 A^2 + \cdots + \gamma_k A^k$$

的序列 $\{S_k\}$ 收斂,則 $\{S_k\}$ 的极限叫做(23)的和,記作

$$\gamma_0 1 + \gamma_1 A + \gamma_2 A^2 + \cdots = S.$$

我們要証的主要結果是下面的定理.

**定理 15.** 令 $\gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \cdots$ 是普通幂級數,它的收斂半徑是 $r$ ,如果綫性變換 $A$ 的特征根 $\rho_i$ 适合 $|\rho_i| < r$ ,則对于這樣的 $A$ ,幂級數(23)是收斂的.

証 我們选取一个基,使 $A$ 关于这个基的陣是古典典型形式

$$\begin{bmatrix} (\alpha_1) & & & \\ & (\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\alpha_h) \end{bmatrix},$$

这里每个对角陣块的形状为

$$(24) \quad \begin{bmatrix} \rho & & & \\ 1 & \rho & & \\ & 1 & \rho & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & \rho \end{bmatrix},$$

而 $\rho$ 是一个特征根. 显然 $A^m$ 的陣里陣块的形状与 $A$ 的陣相同,而且与(24)相同位置的陣块是

$$\begin{bmatrix} \rho^m & & & \\ \binom{m}{1} \rho^{m-1} & \rho^m & & \\ \binom{m}{2} \rho^{m-2} & \binom{m}{1} \rho^{m-1} & \rho^m & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

后者这結果可由把(24)写成 $\rho 1 + \varepsilon$ 而导出,这里



$$z = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

于是

$$z^2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad z^3 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \ddots & \\ 0 & 1 & & & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

所以,如果  $S_k(\lambda)$  表示  $S(\lambda) = \gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \dots$  的第  $k$  部分和,则  $S_k(A)$  的陣的陣块的形状是

$$\begin{bmatrix} S_k(\rho) & 0 \\ S'_k(\rho) & S_k(\rho) & 0 \\ \frac{S''_k(\rho)}{2!} & S'_k(\rho) & S_k(\rho) \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix}.$$

如果  $|\rho| < r$ , 则  $S_k(\rho), S'_k(\rho), \dots$  顺序收敛于  $S(\rho), S'(\rho), \dots$ , 所以,由  $\{S_k(A)\}$  决定的陣序列收敛于一个陣,它的对角陣块的形状是

$$(25) \quad \begin{bmatrix} S(\rho) & 0 \\ S'(\rho) & S(\rho) & 0 \\ \frac{S''(\rho)}{2!} & S'(\rho) & S(\rho) \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix},$$

故  $\{S_k(A)\}$  收敛.

一个重要的特殊情形是对于所有  $A$  定义的指数函数

$$\exp A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \dots,$$

$\exp A$  的陣具有对角陣块形状,各块的形状为

$$\begin{bmatrix} \exp \rho \\ \exp \rho & \exp \rho \\ \frac{\exp \rho}{2!} & \exp \rho & \exp \rho \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix},$$

这个公式可用以計算  $\det (\exp A)$ , 而得出

$$\det (\exp A) = \exp \rho_1 \exp \rho_2 \cdots \exp \rho_n = \exp (\sum \rho_i),$$

这里  $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$  是  $A$  的  $n$  个特征根. 所以

$$(26) \quad \det (\exp A) = \exp (\operatorname{tr} A),$$

这里  $\operatorname{tr} A$  表示  $A$  的迹.

如果  $A$  是正規綫性变换, 則  $A$  的幂級数特別容易处理; 这因为, 此时可在向量空間里找一个单式基使  $A$  的陣是典型形式

$$(27) \quad \operatorname{diag} \{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n\}.$$

于是, 如果  $S(\lambda) = \gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \cdots$  是一个幂級数, 它的收斂半径为  $r > |\rho_i| (i = 1, 2, \cdots, n)$ , 則  $S(A)$  是确定的, 而且这个綫性变换关于选定的单式基的陣是

$$\operatorname{diag} \{S(\rho_1), S(\rho_2), \cdots, S(\rho_n)\}.$$

因为  $S(A)$  关于一个单式基有对角陣, 所以这个变换是正規的.

如果  $U$  是单式变换, 則 (27) 里  $\rho_i$  的绝对值为 1. 所以,  $\rho_i = \exp \sqrt{-1} \theta_i$ , 这里  $\theta_i$  是实数. 令  $H$  是綫性变换, 关于选定的单式基的陣是

$$\operatorname{diag} \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\},$$

則  $H$  是厄米特变换, 而上面的論究指出

$$(28) \quad U = \exp (iH).$$

这个結果与极因子分解結連起来, 指出每个綫性变换的形状为

$$(29) \quad A = P \exp (iH),$$

这里  $P$  是一个(正)半定厄米特变换, 而  $H$  是厄米特变换. 这个因子分解显然推广了任意复数的因子分解  $\alpha = |\alpha| \exp (i\eta)$ , 这里  $\eta$  是实数.

## 習 題 54

1. 証明: 一个綫性变换  $A$  是正定的厄米特变换必須而且只須有某个厄米特变换  $H$  存在使  $A = \exp H$ .

2. 証明: 如果  $A$  的特征根的绝对值  $< 1$ , 則  $\log(1 + A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \dots$  是确定的. 証明:  $\exp(\log(1 + A)) = 1 + A$ .

3. 証明:  $A^k \rightarrow 0$  必須而且只須  $A$  的所有特征根的绝对值都小于 1.

4. 証明:  $A$  的幂序列  $\{A^k\}$  拥有收敛子序列必須而且只須 1) 对于每个特征根  $\rho$  有  $|\rho| \leq 1$  及 2) 对应于绝对值为 1 的根的首等因子都是单因子.

## 第七章

### 向量空間的积

本章讲述由一个右向量空間  $\mathfrak{R}'$  与一个左向量空間  $\mathfrak{S}$  构成的空間对里作出一个羣  $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$  的方法, 这个羣叫做两个空間的直接积. 积  $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$  是一个交換羣, 但通常沒有自然的方法把这个羣作为一个向量空間. 如果因子中有一个是双侧向量空間, 則我們的方法可导致一个向量空間. 本章定义这个概念, 并且注意到: 如果  $\Delta = \Phi$  是一个域, 則任意左或右空間可依常規看作一个双侧空間. 这就导向域上两个向量空間的克伦內克积的定义. 我們还討論张量代数的綱要, 并且讲述域  $\Phi$  上向量空間扩张为包含  $\Phi$  的域  $P$  上向量空間. 最后, 讲述域上(非結合)代数的概念并定义代数的直接积.

**1. 向量空間的积羣** 結連一个左空間与一个右空間的双綫性形式  $g(x, y')$  可看作由每个空間里各选一个向量所得的向量对的积的一个类型, 它給出  $\Delta$  里一个值  $g(x, y')$ . 这个积的基本性质是分配律与下面的齐次性:

$$(1) \quad g(ax, y') = ag(x, y'), \quad g(x, y'a) = g(x, y')a.$$

本章的基本概念是現在要定义的另一種积的概念.

令  $\mathfrak{R}'$  是可除环  $\Delta$  上一个右向量空間, 而  $\mathfrak{S}$  是可除环  $\Delta$  上一个左向量空間. 令  $\mathfrak{P}$  是一个交換羣(用  $+$  表它的运算), 并設对于每个向量对  $x', y$ , 这里  $x' \in \mathfrak{R}'$ ,  $y \in \mathfrak{S}$ , 相伴有一个唯一的元素  $x' \times y \in \mathfrak{P}$ ; 如果

1.  $(x'_1 + x'_2) \times y = x'_1 \times y + x'_2 \times y,$   
 $x' \times (y_1 + y_2) = x' \times y_1 + x' \times y_2;$
2.  $x'\alpha \times y = x' \times \alpha y;$

3.  $\mathfrak{P}$  的每个元素的形状为  $\sum x'_i \times y_i$ .

則  $\mathfrak{P}$  叫做  $\mathfrak{R}'$  与  $\mathfrak{S}$  关于积  $\times$  的积羣.

先証一个非零双綫性形式是这个类型的积必須而且只須  $\Delta = \Phi$  是可交换的. 这因为, 如果采用現在的記法, 并且以  $x' \times y$  代替  $g(y, x')$ , 則由 (1) 得

$$x' \times \alpha y = \alpha(x' \times y), \quad x' \alpha \times y = (x' \times y) \alpha.$$

另一方面有  $x' \times \alpha y = x' \alpha \times y$ . 所以,

$$\alpha(x' \times y) = (x' \times y) \alpha.$$

所以, 如果它是非零形式, 則可取  $\Delta$  里所有值, 故上面的方程指出  $\Delta$  是可交换的. 逆定理显然成立.

次就任意向量空間对  $\mathfrak{R}'$  及  $\mathfrak{S}$  給出作积羣的方法. 先取与  $\mathfrak{R}'$  对偶的  $\mathfrak{R}$  为左向量空間, 并設由非退化的双綫性形式  $g(x, y')$  給出这个对偶性, 这里  $x \in \mathfrak{R}$ ,  $y' \in \mathfrak{R}'$ . 我們取  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{S}$  內的綫性变换羣  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  为值羣  $\mathfrak{P}$ . 最后, 定义  $x' \in \mathfrak{R}'$  与  $y \in \mathfrak{S}$  的积  $x' \times y$  为綫性变换

$$(2) \quad x \rightarrow g(x, x')y.$$

則立知它具有 1. 及 2. 我們还知道:<sup>1)</sup>  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{S}$  內的任意綫性映照的形状为

$$(3) \quad x \rightarrow \sum g(x, x'_i)y_i;$$

故由我們的定义知, 它等于和  $\sum x'_i \times y_i$ . 这証明了它具有性質 3.

对于任意积, 我們可証得通常的法則:

$$0 \times y = 0 = x' \times 0,$$

$$(-x') \times y = -(x' \times y) = x' \times (-y).$$

次設  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$  是  $\mathfrak{S}$  的一个基, 則任意的  $y = \sum \beta_i f_i$ ; 于是,  $x' \times y = \sum x' \times \beta_i f_i = \sum x' \beta_i \times f_i$ . 故  $\mathfrak{P}$  的任意元素可写为  $\sum x'_i \times f_i$  的形状. 仿此, 如果  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  是  $\mathfrak{R}'$  的一个基, 則  $\mathfrak{P}$  的任意元素可写为  $\sum e'_i \times y_i$ , 这里  $y_i \in \mathfrak{S}$ . 如果  $\mathfrak{P}$  的每个元素用上述两种方法写出都是唯一的, 則  $\mathfrak{P}$  叫做  $\mathfrak{R}'$  与  $\mathfrak{S}$  的一个直接

1) 見第五章, § 5.

积. 更好的安排方法如次: 如果

4. (a)  $\sum x'_i \times y_i = 0$  可推得  $y_i$  是綫性相关的, 或所有  $x'_i = 0$ ;

(b)  $\sum x'_i \times y_i = 0$  可推得  $x'_i$  是綫性相关的, 或所有  $y_i = 0$ .

则称群  $\mathfrak{P}$  是  $\mathfrak{R}'$  与  $\mathfrak{S}$  关于  $\times$  的一个直接积.

按这个定义, 群  $\mathfrak{E}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  是一个直接积, 这因为, 如果  $\sum x'_i \times y_i = 0$ , 则由积的定义知: 对于所有  $x$ ,  $\sum g(x, x'_i) y_i = 0$ . 如果  $y_i$  是綫性无关的则对于所有  $x$ ,  $g(x, x'_i) = 0$ . 于是由形式的非退化性知: 对于所有  $i$ ,  $x'_i = 0$ . 另一方面, 設  $x'_i$  是綫性无关的, 则知可找到  $x_i$  的一个集合使  $g(x_i, x'_i) = \delta_{ij}$ . 于是, 每个

$$y_i = \sum g(x_i, x'_i) y_i = 0.$$

$\mathfrak{R}'$  与  $\mathfrak{S}$  的直接积是这两个空間的积的“最一般”方式; 这可由下面定理看出.

**定理 1.** 令  $\mathfrak{P}$  是  $\mathfrak{R}'$  与  $\mathfrak{S}$  关于  $\times$  的一个直接积, 并令  $\mathfrak{P}_1$  是这两个空間关于乘法  $\times_1$  的任意积, 则映照  $\sum x'_i \times y_i \rightarrow \sum x'_i \times_1 y_i$  是  $\mathfrak{P}$  到  $\mathfrak{P}_1$  上的一个同态.

証 設元素  $z \in \mathfrak{P}$  有两种方法写为积的和. 我們可設它們是

$$z = \sum_1^m x'_i \times y_i = \sum_{m+1}^q (-x'_j) \times y_j; \text{ 于是 } \sum_1^q x'_k \times y_k = 0. \text{ 今把}$$

$y_i$  用綫性无关元素的集合  $f_1, f_2, \dots, f_r$  (例如用基) 表出, 則  $y_k = \sum a_{ki} f_i$ , 而

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_k x'_k \times y_k = \sum_k x'_k \times \sum_i a_{ki} f_i \\ &= \sum_i \left( \sum_k x'_k a_{ki} \right) \times f_i. \end{aligned}$$

所以  $\sum x'_k a_{ki} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). 由此推知,  $\mathfrak{P}_1$  里有关系

$$\sum_i \left( \sum_k x'_k a_{ki} \right) \times_1 f_i = 0. \text{ 在 } \mathfrak{P}_1 \text{ 里把上面的步驟倒轉, 可推得}$$

$$\sum_k x'_k \times_1 y_k = 0. \text{ 所以, } z \text{ 的两个形状不同的象 } \sum_1^m x'_i \times_1 y_i \text{ 与}$$

$$\sum_{m+1}^q (-x'_j) \times_1 y_j \text{ 相等. 这意味着对应}$$

$$\sum x'_i \times y_i \rightarrow \sum x'_i \times_1 y_i$$

是单值的, 至此, 可直接验证这个映照是  $\mathfrak{P}$  到  $\mathfrak{P}_1$  上的一个同态.

今设  $\mathfrak{P}_1$  也是一个直接积, 则前面的论证指出: 由  $\sum x'_i \times_1 y_i = 0$  可推得  $\sum x'_i \times y_i = 0$ , 故同态核是 0, 从而同态化为同构. 这证明了

**定理 2.** 如果  $\mathfrak{P}$  及  $\mathfrak{P}_1$  都是  $\mathfrak{R}'$  与  $\mathfrak{S}$  的直接积, 则“自然”映照  $\sum x'_i \times y_i \rightarrow \sum x'_i \times_1 y_i$  是一个同构.

这个结果指出, 给定的两个向量空间的直接积实质上只有一个, 故可只叫它做直接积, 而记这个群为  $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ .

### 習 題 55

1. 把  $\mathfrak{R}'$  里任意向量写为  $n_1 \times 1$  阵, 而  $\mathfrak{S}$  里任意向量写为  $1 \times n_2$  阵. 令  $\mathfrak{R}'$  与  $\mathfrak{S}$  里纯量乘法分别是坐标的右乘法及左乘法. 证明:  $n_1 \times n_2$  阵的群是  $\mathfrak{R}'$  与  $\mathfrak{S}$  关于  $x' \times y = x'y$  (通常阵积) 的直接积.

2. 证明: 从 4. 的两个条件中的一个可推得余一个.

[提示: 注意到只用一个来证定理 1.]

**2. 綫性变换的直接积** 今考虑定理 1 的一个重要推广. 我們也与定理 1 一样令  $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ , 但对于另一个群现在改取  $\Delta$  上右空间  $\mathfrak{U}'$  与  $\Delta$  上左空间  $\mathfrak{V}$  的任意积  $\Omega_1$ . 设  $A'$  是  $\mathfrak{R}'$  到  $\mathfrak{U}'$  内的一个綫性映照, 而  $B$  是  $\mathfrak{S}$  到  $\mathfrak{V}$  内的一个綫性映照, 则可断言映照

$$(4) \quad \sum x'_i \times y_i \rightarrow \sum x'_i A' \times_1 y_i B$$

是  $\mathfrak{P}$  到  $\Omega_1$  内的一个同态. 证明可由重复使用证明定理 1 的论点而得. 譬如, 指出由关系  $\sum x'_k \times y_k = 0$  可推得  $\sum x'_k A' \times_1 y_k B = 0$ . 这也与前面相似, 写  $y_k = \sum \alpha_{kl} f_l$ , 这里  $f_l$  都是綫性无关的; 然后得出  $\sum x'_k \alpha_{kl} = 0$ . 于是由  $A'$  的綫性也得  $\sum (x'_k A') \alpha_{kl} = 0$ . 故由  $B$  的綫性得

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_k (x'_k A') \alpha_{kl} \times_1 f_l B = \sum_k x'_k A' \times_1 \sum_l \alpha_{kl} (f_l B) \\ &= \sum_k x'_k A' \times_1 \sum_l y_k B. \end{aligned}$$

证明的其余部分完全是前面证明的重复.

从现在的结果取  $\mathfrak{U}' = \mathfrak{R}'$ ,  $\mathfrak{V} = \mathfrak{S}$ ,  $A' = 1$ ,  $B = 1$ , 即得定理 1. 另一个重要的特殊情形是取  $\mathfrak{U}' = \mathfrak{R}'$ ,  $\mathfrak{V} = \mathfrak{S}$ , 及  $\Omega_1 = \mathfrak{P}$ .

此时我們知道,如果  $A'$  是  $\mathfrak{R}'$  里任意綫性变換,而  $B$  是  $\mathfrak{S}$  里任意綫性变換,則由 (4) 定义的映照是直接积  $\mathfrak{P}$  里一个自同态;我們叫它做  $A'$  与  $B$  的直接积,而記作  $A' \times B$ . 由定义立知,直接积  $A' \times B$  是可分配的:

$$(5) \quad \left. \begin{aligned} (A'_1 + A'_2) \times B &= A'_1 \times B + A'_2 \times B, \\ A' \times (B_1 + B_2) &= A' \times B_1 + A' \times B_2, \end{aligned} \right\}$$

并且

$$(6) \quad (A' \times B)(C' \times D) = A'C' \times BD.$$

如果用  $1'$  表示  $\mathfrak{R}'$  里恆等映照,而  $1$  表示  $\mathfrak{S}$  里恆等映照,則显然  $1' \times 1$  是  $\mathfrak{P}$  里恆等映照. 由 (6) 还知道,任意  $A' \times B$  可分解为

$$(7) \quad A' \times B = (A' \times 1)(1' \times B) = (1' \times B)(A' \times 1).$$

### 習 題 56

1. 令  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}', \mathfrak{S})$  是  $\mathfrak{R}'$  到  $\mathfrak{S}$  內的綫性映照的羣,并且把  $\mathfrak{L}$  看作  $\mathfrak{R}'$  与  $\mathfrak{S}$  按 §1 里定义的方式的积. 証明: 如果  $A'$  是  $\mathfrak{R}'$  里一个綫性变換,而  $B$  是  $\mathfrak{S}$  里一个綫性变換,則  $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$  里映照  $A' \times B$  与  $L \mapsto ALB$  恆等,这里  $L$  是  $\mathfrak{L}$  的一个一般元素,而  $A$  是  $A'$  在  $\mathfrak{R}$  里的折转变換.

2. 令  $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ , 并令  $\mathfrak{M}$  是自同态  $\Sigma A'_i \times B_i$  的全体,这里  $A'_i$  是  $\mathfrak{R}'$  里一个綫性变換,而  $B_i$  是  $\mathfrak{S}$  里一个綫性变換. 証明:  $\mathfrak{M}$  是  $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$  的自同态环的子环.

3. 証明:  $1' \times B$  形的元素的子集合是  $\mathfrak{M}$  里与  $\mathfrak{L}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$  同构的子环,而  $A' \times 1$  形的元素的子集合是  $\mathfrak{M}$  里与  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}')$  同构的子环.

**3. 双侧向量空間** 上面給出“接合”两个向量空間以构成它們的直接积的方法有严重的缺点,就是最后結果只是一个羣,而不是一个向量空間. 要避去这个困难,此后将就双侧向量空間来考虑,以代替前此的单侧向量空間. 双侧向量空間是由交換羣  $\mathfrak{R}$ 、可除环  $\Delta$  及两个函数  $\alpha x$  与  $x\alpha$  所构成的代数系,这两个函数  $\alpha x$  与  $x\alpha$  分別适合左与右純量乘法的条件并且对于所有  $\alpha, \beta \in \Delta$  与所有  $x \in \mathfrak{R}$  适合結合律

$$(8) \quad (\alpha x)\beta = \alpha(x\beta).$$

所以我們的假定是:  $\mathfrak{R}$  同时为一个左及右向量空間,并且任意右(左)純量乘法是  $\mathfrak{R}$  (作为一个左(右)向量空間)的一个綫性变換.

如果  $\Delta = \Phi$  是一个域,任意右向量空間可看作一个左向量空



間, 只要命  $xa = ax$ . 所以, 在处理域上向量空間时, 我們可設所有这些向量空間是左向量空間. 另一方面, 我們也可把这些向量空間看作双側空間的特殊类型, 此时由任意  $a \in \Delta$  决定的左乘法与右乘法是作为恆等的. 双側向量空間的这个“平凡的”类型是本章此后論述的主题. 我們不难作出其它不平凡类型的双側向量空間. 茲举一个例子次:

**例** 令  $\mathfrak{R}$  是域  $\Phi$  上一个  $n$  維左向量空間, 并令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个(左)基. 令  $S_1, S_2, \dots, S_n$  是  $\Phi$  里的自同构, 并定义  $a \in \Phi$  的右乘法是左空間  $\mathfrak{R}$  里的綫性变换, 由陣

$$\text{diag} \{a^{S_1}, a^{S_2}, \dots, a^{S_n}\}$$

确定的. 則  $e_i a = a^{S_i} e_i$ , 而  $(\sum \xi_i e_i) a = \sum \xi_i a^{S_i} e_i$ . 因为

$$e_i(a + \beta) = (a + \beta)^{S_i} e_i = a^{S_i} e_i + \beta^{S_i} e_i = e_i a + e_i \beta,$$

$$e_i(a\beta) = (a\beta)^{S_i} e_i = a^{S_i} \beta^{S_i} e_i = a^{S_i} (e_i \beta)$$

$$= (a^{S_i} e_i) \beta = (e_i a) \beta,$$

$$e_i 1 = e_i,$$

所以  $\mathfrak{R}$  是  $\Phi$  上一个右向量空間. 因为右乘法是作为左空間的  $\mathfrak{R}$  里的綫性变换, 故(8)成立. 所以,  $\mathfrak{R}$  是一个双側向量空間.

今設  $\mathfrak{R}$  是除环  $\Delta$  上的任意双側向量空間, 而  $\mathfrak{S}$  是  $\Delta$  上一个左向量空間. 則可由把  $\mathfrak{R}$  看作一个右向量空間而作直接积  $\mathfrak{P} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ . 因为映照  $x \mapsto ax$  是作为右向量空間的  $\mathfrak{R}$  里的一个綫性变换, 故知映照  $\sum x_i \times y_i \mapsto \sum ax_i \times y_i$  是  $\mathfrak{P}$  里一个自同态, 这里  $x_i \in \mathfrak{R}, y_i \in \mathfrak{S}$ . 今命

$$(9) \quad a \sum x_i \times y_i = \sum ax_i \times y_i,$$

我們可驗證, 关于这个純量乘法  $\mathfrak{P}$  是  $\Delta$  上一个左向量空間.

今將証: (左)維数  $\dim_l \mathfrak{P}$  是  $\mathfrak{R}$  的左維数与  $\mathfrak{S}$  的左維数的积. 这因为, 令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个左基, 并令  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$  是  $\mathfrak{S}$  的一个左基, 則任意  $x \in \mathfrak{R}$  可写作  $\sum \xi_i e_i$ , 而任意  $y \in \mathfrak{S}$  可写作  $\sum \eta_j f_j$ . 于是,

$$\begin{aligned} x \times y &= \sum \xi_i e_i \times \eta_j f_j = \sum (\xi_i e_i) \eta_j \times f_j \\ &= \sum_j \sum_i (\xi_i e_i) \eta_j \times f_j. \end{aligned}$$

另一方面, 向量  $\sum_i (\xi_i e_i) \eta_j \in \mathfrak{R}$ , 所以,  $\sum_i (\xi_i e_i) \eta_j = \sum_k \mu_{jk} e_k$ . 于是,

$$x \times y = \sum_i \left( \sum_k \mu_{jk} e_k \right) \times f_j = \sum_{i,k} \mu_{ik} (e_k \times f_i).$$

这证明:  $\mathfrak{P}$  里任意向量是向量  $e_i \times f_j$  的左线性组合. 次设  $\sum \gamma_{ij} (e_i \times f_j) = 0$ , 则  $0 = \sum (\gamma_{ij} e_i) \times f_j = \sum_j \left( \sum_i \gamma_{ij} e_i \right) \times f_j$ . 因为  $f_j$  都是线性无关的, 这就给出  $\sum_i \gamma_{ij} e_i = 0$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ). 所以, 每个  $\gamma_{ij} = 0$ .

如果  $\mathfrak{R}$  是  $\Delta$  上一个右空间, 而  $\mathfrak{S}$  是  $\Delta$  上双侧空间, 则可应用类似的讨论. 此时,  $\mathfrak{P} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  可由定义

$$(10) \quad (\sum x_i \times y_i) \alpha = \sum x_i \times y_i \alpha$$

而转化为  $\Delta$  上一个右空间. 关于右维数的积关系也成立.

如果  $\mathfrak{R}$  及  $\mathfrak{S}$  都是  $\Delta$  上双侧向量空间, 则由使用 (9) 及 (10) 可使  $\mathfrak{P}$  转化为  $\Delta$  上一个左及右向量空间. 因为我们已知, 这样定义的任意左乘法可与任意右乘法交换; 所以  $\mathfrak{P}$  是一个双侧向量空间.

通常定义一个双侧向量空间  $\mathfrak{R}$  到另一个双侧向量空间  $\mathfrak{S}$  内的一个线性变换是  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{S}$  内的一个映照, 它对于左向量空间  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{S}$  是线性的, 并且对于右向量空间  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{S}$  也是线性的. 仿此, 如果存在有  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{S}$  上的一个 1—1 线性变换, 则  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{S}$  看作是等价的.

今设  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{S}$  及  $\mathfrak{T}$  是三个双侧  $\Delta$ -空间, 而考虑双侧空间  $\mathfrak{R} \times (\mathfrak{S} \times \mathfrak{T})$ , 这里  $\times$  表示直接积, 它按指示的方式看作一个双侧空间的. 这个空间的任意元素显然具有形状  $\sum x_i \times (y_i \times z_i)$ , 这里  $x_i \in \mathfrak{R}$ ,  $y_i \in \mathfrak{S}$ ,  $z_i \in \mathfrak{T}$ . 同理,  $(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}) \times \mathfrak{T}$  的任意元素的形状为  $\sum (x_i \times y_i) \times z_i$ . 至此, 我们要证  $\sum x_i \times (y_i \times z_i) \rightarrow \sum (x_i \times y_i) \times z_i$  定义  $\mathfrak{R} \times (\mathfrak{S} \times \mathfrak{T})$  到  $(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}) \times \mathfrak{T}$  上的一个 1—1 线性变换. 要达到这个目的, 设在  $\mathfrak{R} \times (\mathfrak{S} \times \mathfrak{T})$  里有一个关系  $\sum x_i \times (y_i \times z_i) = 0$ . 则可写下  $x_i = \sum e_j \alpha_{ji}$  及  $z_i = \sum \beta_{ik} g_k$ , 这

里  $e_i$  是右綫性无关的, 而  $g_k$  是左綫性无关的. 如果代入关系里, 則得

$$0 = \sum_i e_i \times \sum_j \alpha_{ji}(y_i \times z_j) = \sum_j e_j \times \sum_i (\alpha_{ji} y_i \times z_j).$$

所以,  $\sum_i \alpha_{ji} y_i \times z_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots)$ . 于是,

$$0 = \sum_{i,k} (\alpha_{ji} y_i) \beta_{ik} \times g_k = \sum_k \sum_i (\alpha_{ji} y_i) \beta_{ik} \times g_k.$$

所以, 对于所有  $j, k$ ,  $\sum_i (\alpha_{ji} y_i) \beta_{ik} = 0$ . 故  $\sum_i \alpha_{ji} (y_i \beta_{ik}) = 0$ , 并由此可推得

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j e_j \times \sum_i \alpha_{ji} (y_i \beta_{ik}) = \sum_i \left( \sum_j e_j \alpha_{ji} \right) \times y_i \beta_{ik} \\ &= \sum_i x_i \times y_i \beta_{ik}. \end{aligned}$$

同理, 这个关系給出关系  $\sum (x_i \times y_i) \times z_i = 0$ . 由直接驗證指出对应

$$\sum x_i \times (y_i \times z_i) \rightarrow \sum (x_i \times y_i) \times z_i$$

是  $\mathfrak{R} \times (\mathfrak{S} \times \mathfrak{T})$  到  $(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}) \times \mathfrak{T}$  上的一个綫性变换. 由对称性还知这个映照的核是 0; 所以, 它是等价. 因为是等价, 故在两个直接积  $\mathfrak{R} \times (\mathfrak{S} \times \mathfrak{T})$  与  $(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}) \times \mathfrak{T}$  之間无須区别; 因此这些积就只記作  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$ , 而把这个空間叫作三个空間  $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$  的直接积. 积  $x \times (y \times z)$  或  $(x \times y) \times z$  也只記作  $x \times y \times z$ .

我們可按类似方式定义三个以上的双侧空間的直接积: 按  $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \dots, \mathfrak{U}$  的次序并結合各因子所得的任意两个直接积在关于三个因子的自然等价类型下是等价的, 所以任意一个积空間都可記作  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{U}$ ; 而这个空間里的向量积可記作  $x \times y \times \dots \times u$ .

## 習題 57

1. 令  $\alpha \mapsto \alpha^S$  是域  $\Phi$  到它自身內的一个同构, 并令  $\mathfrak{R}$  是  $\Phi$  上一个左向量空間. 定义  $x\alpha = \alpha^S x$ , 并驗證: 这使  $\mathfrak{R}$  轉化为一个双侧向量空間. 証明: 如果象元素  $\alpha^S$  的子域  $\Phi^S$  是含于  $\Phi$  里的真子域, 則  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}$  的左及右維数不相同.

2. 令  $\mathfrak{R}$  是  $\Delta$  上一个双侧向量空间使  $\Delta$  上左维数与右维数都是有限而且相等。  
证明：存在有向量集合  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 同时是  $\Delta$  上  $\mathfrak{R}$  的一个左基及一个右基。

3. 令  $\mathfrak{R}$  是  $\Phi$  上一个左向量空间, 如第 1 题所定义, 而  $S$  是  $\Phi$  里一个自同构, 并令  $\mathfrak{S}$  是由自同构  $T$  定义的这个类型的另一个空间。证明：如果  $ST \neq TS$ , 则  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  与  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{R}$  不等价。

4. 克伦内克积 本章此后将假定  $\Delta = \Phi$  是一个域; 并且只讨论单侧向量空间, 而把它们都写作左空间。空间  $\mathfrak{R}$  的共轭空间依通例记作  $\mathfrak{R}^*$ , 但这个空间也是看作一个左空间。

今设  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{S}$  是  $\Phi$  上两个空间, 暂时取  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{S}$  为双侧向量空间, 亦即按通常办法对于所有  $\alpha$  与  $x$  命  $\alpha x = x\alpha$ , 并作直接积  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ 。这也是一个双侧向量空间, 而且是平凡种类的双侧向量空间, 因为

$$\begin{aligned}\alpha(\sum x_i \times y_i) &= \sum \alpha x_i \times y_i \\ &= \sum x_i \alpha \times y_i = \sum x_i \times \alpha y_i \\ &= \sum x_i \times y_i \alpha = \sum (x_i \times y_i) \alpha.\end{aligned}$$

所以,  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  可只看作一个左向量空间。这样得出的(左)向量空间叫做  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{S}$  的克伦内克积。由左向量空间的观点来说, 上面方程里重要的部分是

$$\alpha(\sum x_i \times y_i) = \sum \alpha x_i \times y_i = \sum x_i \times \alpha y_i.$$

于是, 空间  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  有下列的特性: 对于每个  $x \in \mathfrak{R}$  及  $y \in \mathfrak{S}$  定义一个积  $x \times y \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ , 使

- 1'.  $(x_1 + x_2) \times y = x_1 \times y + x_2 \times y,$   
 $x \times (y_1 + y_2) = x \times y_1 + x \times y_2.$
- 2'.  $\alpha(x \times y) = \alpha x \times y = x \times \alpha y.$
- 3'.  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  的每个元素的形状是  $\sum x_i \times y_i$ , 这里  $x_i \in \mathfrak{R},$   
 $y_i \in \mathfrak{S}.$
- 4'. (a)  $\sum x_i \times y_i = 0$  可推得  $y_i$  是线性相关的, 或所有  $x_i$   
等于 0.  
(b)  $\sum x_i \times y_i = 0$  可推得  $x_i$  是线性相关的, 或所有  $y_i$   
等于 0.

前面的讨论曾建立了任意两个(有限维)向量空间的克伦内克

积的存在性<sup>1)</sup>。我們所得結果的大部分可应用于目前情况,特別是有  $\dim(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}) = \dim \mathfrak{R} \dim \mathfrak{S}$ 。今將指出: 这个方程可用以代替无关性条件 4'; 这因为有下列的定理。

**定理 3.** 令  $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$  及  $\mathfrak{P}$  是域  $\Phi$  上向量空間, 并設定义一个積  $x \times y$ , 它適合条件 1', 2', 及 3', 这里  $x \in \mathfrak{R}, y \in \mathfrak{S}$ , 而  $x \times y \in \mathfrak{P}$ , 則  $\mathfrak{P}$  是  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{S}$  的一个克倫內克積必須而且只須  $\dim \mathfrak{P} = \dim \mathfrak{R} \dim \mathfrak{S}$ 。

**証** 这个条件的必要性已曾証明过。反过来, 令  $\dim \mathfrak{P} = \dim \mathfrak{R} \dim \mathfrak{S}$ 。令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基, 并令  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$  是  $\mathfrak{S}$  的一个基, 則易知向量  $e_i \times f_j$  是  $\mathfrak{P}$  的生成元素。因为它們的个数是  $nm$ , 所以构成一个基。今設  $e_1, e_2, \dots, e_r$  是  $\mathfrak{R}$  里綫性无关向量, 則可假定它們是  $\mathfrak{R}$  的基的一部分。如果  $\sum e_i \times y_i = 0$ , 則可写下  $y_i = \sum \beta_{ij} f_j$  而得  $\sum \beta_{ij} e_i \times f_j = 0$ 。于是, 每个  $\beta_{ij} = 0$ , 这就意味着每个  $y_i = 0$ 。仿此可証第二个无关性条件。

我們已知, 双側向量空間的直接乘法是可結合的, 而特別在克倫內克積也是成立。因此, 如果  $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$  及  $\mathfrak{T}$  是域上三个向量空間, 則有  $\mathfrak{R} \times (\mathfrak{S} \times \mathfrak{T})$  到  $(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}) \times \mathfrak{T}$  上的自然等价  $\sum x_i \times (y_i \times z_i) \rightarrow \sum (x_i \times y_i) \times z_i$ , 故可把这两个空間迭合, 而把元素  $\sum x_i \times (y_i \times z_i)$  与  $\sum (x_i \times y_i) \times z_i$  迭合。我們也可与前面一样, 把它們的記法簡化而写为  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$  及  $x \times y \times z$ 。我們可更一般地定义任意有限个空間的克倫內克積  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{U}$ , 并以  $\sum x \times y \times \dots \times u$  表示它的元素。

双側空間的直接乘法通常不是可交換的<sup>2)</sup>; 但在克倫內克積的这个特殊情形, 交換律成立。事实上, 我們可証得  $\sum x_i \times y_i \rightarrow \sum y_i \times x_i$  定义  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  到  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{R}$  上的一个等价。这个結果的証明可效法其它証明得出: 把  $x_i$  及  $y_i$  用綫性无关元素列出, 則可証  $\sum x_i \times y_i = 0$  成立必須而且只須  $\sum y_i \times x_i = 0$ 。余下的論点就是驗証这个說法。更一般地說, 如果  $(j_1, j_2, \dots, j_r)$  是  $(1, 2, \dots,$

1) 在第九章里將看到这个結果在无限維空間里也成立。

2) 參看习题 57 的第 3 題。

$s)$  的任意排列, 則克伦内克积  $\mathfrak{R}^{(1)} \times \mathfrak{R}^{(2)} \times \cdots \times \mathfrak{R}^{(s)}$  与  $\mathfrak{R}^{(j_1)} \times \mathfrak{R}^{(j_2)} \times \cdots \times \mathfrak{R}^{(j_s)}$  等价, 而  $\sum x_i^{(1)} \times x_i^{(2)} \times \cdots \times x_i^{(s)} \rightarrow \sum x_i^{(j_1)} \times x_i^{(j_2)} \times \cdots \times x_i^{(j_s)}$  是一个等价映照.

向量空間的克伦内克积的概念导致有用的一个自由(結合)代数学的概念的定义. 要定义这个概念, 我們从域  $\Phi$  上一个任意向量空間  $\mathfrak{R}$  出发, 并引入克伦内克积  $\mathfrak{R}_0^i \equiv \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \cdots \times \mathfrak{R}$  ( $i$  个因子), 并規定  $\mathfrak{R}_0^1 = \mathfrak{R}$  及  $\mathfrak{R}_0^0 = \Phi$ ; 于是对于所有  $i = 0, 1, 2, \cdots$ ,  $\mathfrak{R}_0^i$  是确定的. 由上面結合性的說明知, 如果  $i, j \geq 1$ , 則  $\mathfrak{R}_0^i \times \mathfrak{R}_0^j = \mathfrak{R}_0^{i+j}$ . 于是, 任意  $x^{(i)} \in \mathfrak{R}_0^i, x^{(j)} \in \mathfrak{R}_0^j$  决定  $\mathfrak{R}_0^{i+j}$  的一个向量  $x^{(i)} \times x^{(j)}$ . 如果  $i = 0$  或  $j = 0$ , 則定义  $x^{(i)} \times x^{(j)}$  是  $x^{(i)}$  (或  $x^{(j)}$ ) 与域元素  $x^{(i)}$  (或  $x^{(j)}$ ) 的积. 今作空間  $\mathfrak{R}_0^i$  的直接和  $\mathfrak{F}$ . 这个空間可定义为序列  $x = (x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots)$  的集合, 这里  $x^{(i)} \in \mathfrak{R}_0^i$ , 而对于充分大的  $i, x^{(i)} = 0$ . 令  $y \equiv (y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots)$ , 規定  $x = y$  必須而且只須  $x^{(i)} = y^{(i)} (i = 0, 1, 2, \cdots)$ . 对于任意  $x$  及  $y$  定义

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} x + y &= (x^{(0)} + y^{(0)}, x^{(1)} + y^{(1)}, \cdots), \\ \alpha x &= (\alpha x^{(0)}, \alpha x^{(1)}, \alpha x^{(2)}, \cdots), \end{aligned} \right\}$$

則  $\mathfrak{F}$  显然是一个向量空間. 如果把向量  $(0, \cdots, 0, x^{(i)}, 0, \cdots)$  与  $x^{(i)}$  看作相同, 則  $\mathfrak{F}$  里任意向量可有一种而且只有一种方法写成  $\sum_{i=0}^{\infty} x^{(i)}$ , 这里  $i$  充分大时  $x^{(i)} = 0$ . 如果  $i_j$  是不相同的, 并且  $x^{(i_j)} \neq 0$ , 則这些向量是綫性无关的. 所以, 如果  $\mathfrak{R} \neq 0$ , 則  $\mathfrak{F}$  是无限維空間.

今在  $\mathfrak{F}$  里由定义  $(\sum x^{(i)}) \times (\sum y^{(j)}) = \sum z^{(k)}$  引入乘法  $\times$ , 这里

$$(12) \quad z^{(k)} = x^{(0)} \times y^{(k)} + x^{(1)} \times y^{(k-1)} + \cdots + x^{(k)} \times y^{(0)}.$$

容易驗証:  $\mathfrak{F}$  是一个結合代数. 这个代数叫做建立在向量空間上的自由(結合)代数.

## 習題 58

1. 証明: 如果  $\mathfrak{R}$  是一維空間, 則  $\mathfrak{F}$  实质上是  $\Phi$  上含有一个不定量(超越元素)的多項式代数.

2. 令  $\mathfrak{F}$  是建立在  $n$  維向量空間  $\mathfrak{R}$  上的自由代数, 并令  $\mathfrak{B}$  是由向量  $x \times y - y \times x$  生成的  $\mathfrak{F}$  里(双侧)理想, 这里  $x$  及  $y$  都  $\in \mathfrak{R}$ . 証明:  $\mathfrak{F}/\mathfrak{B}$  实质上是含有  $n$  个代数无关的超越元素的多項式代数.

3. 令  $\mathfrak{F}$  是建立在  $n$  維向量空間  $\mathfrak{R}$  上的自由代数, 設  $\Phi$  的特征数  $\neq 2$ , 并令  $\mathfrak{B}$  是由向量  $x \times y + y \times x$  生成的  $\mathfrak{F}$  里理想, 这里  $x, y \in \mathfrak{R}$ . 則  $\mathfrak{F}/\mathfrak{B}$  叫做建立在  $\mathfrak{R}$  上的格拉斯曼 (Grassmann) 代数, 或外代数. 証明:  $\dim \mathfrak{F}/\mathfrak{B} = 2^n$ .

4. 如果  $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \dots, \mathfrak{U}$  是  $\Phi$  上向量空間, 則  $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \dots, \mathfrak{U}$  上多綫性函数是函数  $f(x, y, \dots, u)$ , 这里  $x \in \mathfrak{R}, y \in \mathfrak{S}, \dots, u \in \mathfrak{U}$ , 而函数值  $\in \Phi$ , 并且当任意一个变量除外而其余变量取固定值时,  $f$  是这个变量的綫性函数. 証明: 1) 如果  $f$  是多綫性函数, 則  $\sum x_i \times y_i \times \dots \times u_i \rightarrow \sum f(x_i, y_i, \dots, u_i)$  是  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{U}$  的共轭空間的一个元素; 2) 如果  $f$  是  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{U}$  的一个綫性函数, 則  $f$  对于形状如  $x \times y \times \dots \times u$  的向量子集合的短縮是一个多綫性函数. 由此証明多綫性函数的概念与  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{U}$  的綫性函数的概念等价.

5. 令  $g(x), h(y), \dots, k(u)$  分別  $\in \mathfrak{R}^*, \mathfrak{S}^*, \dots, \mathfrak{U}^*$ . 証明:  $f(x, y, \dots, u) = g(x)h(y) \dots k(u)$  是多綫性函数. 令  $f$  也表示  $(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{U})^*$  的相伴元素, 証明:  $\sum g \times h \times \dots \times k \rightarrow \sum f$  定义  $\mathfrak{R}^* \times \mathfrak{S}^* \times \dots \times \mathfrak{U}^*$  到  $(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \times \dots \times \mathfrak{U})^*$  上的一个等价.

**5. 綫性变换及陣的克伦內克积** 如果  $A$  是  $\mathfrak{R}$  里一个綫性变换, 而  $B$  是  $\mathfrak{S}$  里一个綫性变换, 則知  $\sum x_i \times y_i \rightarrow \sum x_i A \times y_i B$  是  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  里一个羣同态. 这个映照与純量乘法是可交換, 也是显然的, 所以它是綫性映照. 这个映照叫做  $A$  与  $B$  的克伦內克积  $A \times B$ . 同理可定义若干个綫性变换的克伦內克积  $A \times B \times \dots \times D$ . 今將証: 关于克伦內克乘法,  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  里綫性变换的向量空間  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}, \mathfrak{R} \times \mathfrak{S})$  是一个克伦內克积  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) \times \mathfrak{L}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ . 方程(5)指出分配律成立. 还有

$$\begin{aligned}(x \times y)(\alpha(A \times B)) &= (xA \times yB)\alpha \\ &= (xA)\alpha \times yB = x(A\alpha) \times yB.\end{aligned}$$

所以,  $\alpha(A \times B) = \alpha A \times B$ . 同理有  $\alpha(A \times B) = A \times \alpha B$ . 次令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基, 而  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$  是  $\mathfrak{S}$  的一个基, 則  $nm$  个向量  $e_i \times f_j$  构成  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  的一个基. 令  $E_{iip', jjp'}$  是  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  的綫性变换, 它把  $e_i \times f_j$  映到  $e_{i'} \times f_{j'}$  而把其余的  $e_k \times f_l$  映到 0, 則可驗證

$$(13) \quad E_{iip', jjp'} = E_{iip'} \times F_{jjp'},$$

这里  $E_{iip'}$  是  $\mathfrak{R}$  里綫性变换把  $e_i$  映到  $e_{i'}$ , 而把其余的  $e$  映到 0,  $F_{jjp'}$  是  $\mathfrak{S}$  里綫性变换, 它把  $f_j$  映到  $f_{j'}$ , 而把其余的  $f$  映到 0. 所以,

$\mathcal{L}(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}, \mathfrak{R} \times \mathfrak{S})$  的每个元素的形状是  $\sum A_i \times B_i$ , 这里  $A_i \in \mathcal{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ ,  $B_i \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ . 因为  $\dim \mathcal{L}(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}, \mathfrak{R} \times \mathfrak{S}) = (mn)^2 = \dim \mathcal{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) \dim \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ , 故由定理 3 得出了我们的论断. 所以就证明了下面的定理.

**定理 4.** 如果  $\mathfrak{R}$  及  $\mathfrak{S}$  是(有限维)向量空间, 则空间  $\mathcal{L}(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}, \mathfrak{R} \times \mathfrak{S})$  等于  $\mathcal{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) \times \mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ , 后者是关于线性变换的克伦内克乘法.

今设

$$(14) \quad e_i A = \sum \alpha_{ij} e_j, \quad f_k B = \sum \beta_{kl} f_l,$$

则  $(\alpha)$  与  $(\beta)$  顺序是  $A$  与  $B$  关于所选的基的阵. 于是,

$$(15) \quad (e_i \times f_k)(A \times B) = \sum \alpha_{ij} \beta_{kl} e_j \times f_l.$$

今把向量  $e_i \times f_k$  依字典的编次如

$(e_1 \times f_1, \dots, e_1 \times f_m; e_2 \times f_1, \dots, e_2 \times f_m; \dots; \dots, e_n \times f_m)$ , 并把这个有序基叫做  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  与  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$  的连带基. 方程(15)指出,  $A \times B$  关于这个连带基的阵是

$$\left( \begin{array}{c|c|c} \alpha_{11}\beta_{11} \cdots \alpha_{11}\beta_{1m} & \alpha_{12}\beta_{11} \cdots \alpha_{12}\beta_{1m} & \cdots \alpha_{1n}\beta_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{11}\beta_{m1} \cdots \alpha_{11}\beta_{mm} & \alpha_{12}\beta_{m1} \cdots \alpha_{12}\beta_{mm} & \cdots \alpha_{1n}\beta_{mm} \\ \hline \alpha_{21}\beta_{11} \cdots \alpha_{21}\beta_{1m} & \alpha_{22}\beta_{11} \cdots \alpha_{22}\beta_{1m} & \cdots \alpha_{2n}\beta_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{21}\beta_{m1} \cdots \alpha_{21}\beta_{mm} & \alpha_{22}\beta_{m1} \cdots \alpha_{22}\beta_{mm} & \cdots \alpha_{2n}\beta_{mm} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right).$$

这个阵叫做  $(\alpha)$  与  $(\beta)$  的克伦内克积, 而记作  $(\alpha) \times (\beta)$ .

支配线性变换的克伦内克积的基本法则在阵方面有它们的相应法则. 特别是前面定理指出:  $\Phi$  上  $nm \times nm$  阵的空间是  $\Phi$  上  $n \times n$  阵的空间与  $\Phi$  上  $m \times m$  阵的空间的克伦内克积. 我们还知道, 在线性变换方面  $(A \times B)(C \times D) = AC \times BD$  成立, 而这直接导致阵的法则

$$(16) \quad ((\alpha) \times (\beta))((\gamma) \times (\delta)) = (\alpha)(\gamma) \times (\beta)(\delta).$$



## 習 題 59

1. 証明:  $A \times B$  关于基  $(e_1 \times f_1, e_2 \times f_1, \dots, e_n \times f_1; e_1 \times f_2, e_2 \times f_2, \dots, e_n \times f_2, \dots; \dots, e_n \times f_m)$  的陣是  $(\beta) \times (\alpha)$ . 于是, 証明:  $(\beta) \times (\alpha)$  与  $(\alpha) \times (\beta)$  相似.

2. 証明:  $(\alpha) \times ((\beta) \times (\gamma)) = ((\alpha) \times (\beta)) \times (\gamma)$ .

3. 証明: 如果  $\rho$  是  $A$  的特征多項式的一个根, 而  $\sigma$  是  $B$  的特征多項式的一个根, 則  $\rho\sigma$  是  $A \times B$  的特征多項式的一个根.

4. 証明:  $\det(A \times B) = (\det A)^m (\det B)^n$ .

**6. 张量空間** 如果  $\mathfrak{R}$  是一个向量空間, 而  $\mathfrak{R}^*$  是  $\mathfrak{R}$  的共軛空間, 則任意克伦內克积空間  $\mathfrak{R} \times \dots \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^* \times \dots \times \mathfrak{R}^*$  叫做建立于空間  $\mathfrak{R}$  上的张量空間. 这样空間的元素叫做张量; 并且如果有  $r$  个因子为  $\mathfrak{R}$  及  $s$  个因子为  $\mathfrak{R}^*$ , 則說这些张量是  $r$  秩逆变及  $s$  秩协变的. 我們用簡記法  $\mathfrak{R}_r^s$  表这个空間. 为方便起見, 也象 § 4 一样, 把  $\Phi$  看作 0 秩张量空間  $\mathfrak{R}_0^0$ .

如果  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是基空間  $\mathfrak{R}$  的一个基, 而  $(e^1, e^2, \dots, e^n)^{1)}$  是  $\mathfrak{R}^*$  的余基, 亦即

$$e^i(e_j) = \delta_j^i,$$

这里  $\delta_j^i$  是克伦內克的  $\delta$ , 則向量

$$(17) \quad e_{i_1} \times e_{i_2} \times \dots \times e_{i_r} \times e^{j_1} \times \dots \times e^{j_s}$$

构成张量空間的一个基. 这个空間里任意向量可写为

$$(18) \quad \sum \xi_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} e_{i_1} \times \dots \times e_{i_r} \times e^{j_1} \times \dots \times e^{j_s}.$$

我們自然欢迎由  $\mathfrak{R}$  的基  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  决定的这个类型的基.

张量空間的元素(18)叫做关于  $\mathfrak{R}$  里  $(e)$  基的坐标是  $\xi_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$  的张量.

如果  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的另一个基, 而  $f_i = \sum \mu_{ij}^i e_j$ , 則

$$e_i = \sum v_{ij}^i f_j, \quad f^i = \sum v_{ij}^i e^j, \quad e^i = \sum \mu_{ij}^i f^j,$$

这里  $(v)$  是陣  $(\mu)$  的逆陣. 于是,

$$\begin{aligned} & \sum \xi_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} e_{i_1} \times \dots \times e_{i_r} \times e^{j_1} \times \dots \times e^{j_s} \\ &= \sum \xi_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} v_{i_1 k_1}^{j_1} \dots v_{i_r k_r}^{j_r} \mu_{l_1}^{j_1} \dots \mu_{l_s}^{j_s} f_{k_1} \times \dots \times f_{k_r} \end{aligned}$$

1) 这个記法比以前的記法  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  有更多的方便.

$$\times f^{i_1} \times \cdots \times f^{i_r}.$$

故上面的张量关于  $(f)$ -基的坐标是

$$(19) \quad \eta_{i_1 \cdots i_s}^{k_1 \cdots k_r} = \sum \xi_{j_1 \cdots j_r}^{i_1 \cdots i_r} v_{i_1}^{k_1} \cdots v_{i_r}^{k_r} \mu_{j_1}^{i_1} \cdots \mu_{j_s}^{i_s}.$$

次考虑綫性变换的折轉的概念的扩张. 我們已知, 如果  $A$  是  $\mathfrak{R}$  里任意綫性变换, 則  $A$  的折轉变换  $A^*$  是  $\mathfrak{R}^*$  里映照  $x^* \rightarrow y^*$ ,

这里  $y^*(x) = x^*(xA)$ . 今將綫性变换  $A'_r \equiv \overbrace{A \times \cdots \times A}^r \times \overbrace{A^* \times \cdots \times A^*}^s$  与  $A$  相伴; 自然就把这个变换考虑为  $A$  在张量空間  $\mathfrak{R}_r^s$  里的誘导变换. 我們知道, 如果  $(\alpha)$  是  $A$  关于基  $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$  的陣, 則  $(\alpha)'$  是  $A^*$  关于余基  $(e^1, e^2, \cdots, e^n)$  的陣. 故  $A'_r$  关于字典式次序的自然基 (17) 的陣是克伦內克积  $\overbrace{(\alpha) \times \cdots \times (\alpha)}^r \times \overbrace{(\alpha)' \times \cdots \times (\alpha)'}^s$ .

有一个重要方法使  $r-1 (\geq 0)$  秩逆变及  $s-1 (\geq 0)$  秩协变的一个张量与  $r$  秩逆变及  $s$  秩协变的任意张量相伴, 这个方法叫做短縮. 首先我們知道, 如果  $x \in \mathfrak{R}$  而  $y^* \in \mathfrak{R}^*$ , 則映照  $(x, y^*) \rightarrow y^*(x)$  是結連  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{R}^*$  的一个双綫性形式. 因为  $\Phi$  是可交换的, 所以, 这个形式按 §1 的說明定义向量空間  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{R}^*$  的一个积. 所以, 由定理 1 知, 映照  $\sum x_i \times y_i^* \rightarrow \sum y_i^*(x_i)$  是  $\mathfrak{R}_1^1 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^*$  到加法羣  $\Phi$  上的一个同态. 我們还立得: 这个对应是  $\mathfrak{R}_1^1$  到一維向量空間  $\Phi (= \mathfrak{R}_0^0)$  上的一个綫性变换.

§1 的討論还指出: 如果  $\Theta$  是另一个向量空間, 則  $\mathfrak{R}_1^1$  到  $\mathfrak{R}_0^0$  上的綫性映照可与  $\Theta$  里恆等映照組合給出  $\mathfrak{R}_1^1 \times \Theta$  到  $\mathfrak{R}_0^0 \times \Theta$  上的一个綫性映照. 我們用下面法則

$$\sum x_i \times y_i^* \times z_i \rightarrow \sum y_i^*(x_i) \times z_i$$

定义积映照, 这里  $x_i \in \mathfrak{R}$ ,  $y_i^* \in \mathfrak{R}^*$ ,  $z_i \in \Theta$ . 我們易知, 空間  $\mathfrak{R}_0^0 \times \Theta$  在映照  $\sum \alpha_i \times z_i \rightarrow \sum \alpha_i z_i$  下等价于  $\Theta$ . 故知,

$$(20) \quad \sum x_i \times y_i^* \times z_i \rightarrow \sum y_i^*(x_i) z_i$$

是  $\mathfrak{R}_1^1 \times \Theta$  到  $\Theta$  上的一个綫性变换.

把  $\mathcal{G}$  特殊化为张量空间  $\mathfrak{R}_{-1}^1$  得出短缩方法。这样特殊化直接指出：映照

$$\begin{aligned} \sum x \times y^* \times x_1 \times \cdots \times x_{r-1} \times y_1^* \times y_2^* \times \cdots \times y_{s-1}^* \\ \rightarrow \sum y^*(x) x_1 \times \cdots \times x_{r-1} \times y_1^* \times \cdots \times y_{s-1}^{*1)} \end{aligned}$$

是  $\mathfrak{R}_1^1 \times \mathfrak{R}_{-1}^1$  到  $\mathfrak{R}_{-1}^1$  上的一个线性映照。今令  $k$  是从  $1, 2, \cdots, r$  里选取, 而  $l$  是从  $1, \cdots, s$  里选取, 则知映照

$$\begin{aligned} \sum x_1 \times \cdots \times x_r \times y_1^* \times \cdots \times y_s^* \\ \rightarrow \sum x_k \times y_l^* \times x_1 \times \cdots \times x_{k-1} \times x_{k+1} \times \cdots \\ \times x_r \times y_1^* \times \cdots \times y_{l-1}^* \times y_{l+1}^* \times \cdots \times y_s^* \end{aligned}$$

是  $\mathfrak{R}_r^r$  到  $\mathfrak{R}_1^1 \times \mathfrak{R}_{-1}^1$  上的一个等价。所以, 映照

$$\begin{aligned} (21) \quad \sum x_1 \times \cdots \times x_r \times y_1^* \times \cdots \times y_s^* \\ \rightarrow \sum y_l^*(x_k) x_1 \times \cdots \times x_{k-1} \times x_{k+1} \times \cdots \\ \times x_r \times y_1^* \times \cdots \times y_{l-1}^* \times y_{l+1}^* \times \cdots \times y_s^* \end{aligned}$$

是  $\mathfrak{R}_r^r$  到  $\mathfrak{R}_{-1}^1$  上的一个线性变换。这个映照叫做  $\mathfrak{R}_r^r$  对于第  $k$  个逆变指标及第  $l$  个协变指标的短缩。

今用  $\mathfrak{R}_r^r$  的一个基  $e_{i_1} \times \cdots \times e_{i_r} \times e^{i_1} \times \cdots \times e^{i_s}$  而考虑张量(18), 对于第  $k$  个逆变指标及第  $l$  个协变指标的短缩给出张量

$$\begin{aligned} \sum \xi_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_r} \delta_{i_l}^{j_l} e_{i_1} \times \cdots \times e_{i_{k-1}} \times e_{i_{k+1}} \times \cdots \times e_{i_r} \times \\ e^{i_1} \times \cdots \times e^{i_{l-1}} \times e^{i_{l+1}} \times \cdots \times e^{i_s}. \end{aligned}$$

所以, 短缩张量关于由  $\mathfrak{R}$  里  $(e)$ -基所决定的基的坐标是

$$(22) \quad \xi_{i_1 \cdots i_{l-1} i_{l+1} \cdots i_s}^{j_1 \cdots j_{k-1} j_{k+1} \cdots j_r} = \sum_q \xi_{i_1 \cdots i_{l-1} q i_{l+1} \cdots i_s}^{j_1 \cdots j_{k-1} q j_{k+1} \cdots j_r}.$$

短缩的概念可用以给出一个线性变换的迹的定义, 它与基无关。首先注意到  $\mathfrak{R}$  里线性变换的空间  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$  可看作张量空间  $\mathfrak{R}_1^1$ ; 这由直接积的作法 (§ 1) 可以明白。因为, 如果  $x \in \mathfrak{R}$ , 而  $y^* \in \mathfrak{R}^*$ , 则我们曾定义  $x \times y^*$  是  $\mathfrak{R}$  到它自身内的线性变换, 它把向量  $u$  映到  $y^*(u)x$ 。我们知道, 关于  $\times$  的这个定义,  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^*$ ,

1) 这里略去求和号的下标, 我们理会是对所显出的这个类型的项的和。

所以,  $\mathfrak{L}$  的任意元素可写成  $\sum x_i \times y_i^*$  的形状. 故我們所定义的短縮是  $\mathfrak{L}$  到  $\Phi$  內的一个綫性映照, 它把  $\sum x_i \times y_i^*$  映到  $\sum y_i^*(x_i)$ . 今將証明: 这个映照与由  $\mathfrak{R}$  的基定义的映照  $A \rightarrow \text{tr } A$  重合.

要証这个結果, 令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基, 并記  $A = \sum u_i^* \times e_i$ , 則

$$e_j A = \sum_i u_i^*(e_j) e_i.$$

所以,  $A$  关于  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的陣是  $(\alpha) \equiv (u_i^*(e_j))$ . 故  $\text{tr } A = \sum u_i^*(e_i)$ . 这与由短縮得出的結果相同. 基改变就得  $A$  的另一个陣与  $(\alpha)$  相似, 它的跡与张量的短縮重合. 故无須(象以前那样) 用直接計算去驗證这个事实, 就可知道: 相似陣有相同的迹.

**7. 张量的对称类** 本节讲述  $r$  秩逆变张量的空間  $\mathfrak{R}_r^0$ . 这个空間的元素是张量  $\sum x_1 \times x_2 \times \dots \times x_r$ . 令  $i \rightarrow i'$  是数  $1, 2, \dots, r$  的任意排列, 則知映照

$$\sum x_1 \times x_2 \times \dots \times x_r \rightarrow \sum x_{1'} \times x_{2'} \times \dots \times x_{r'}$$

是  $\mathfrak{R}_r^0$  里一个 (1—1) 綫性变换. 这个变换叫做  $\mathfrak{R}_r^0$  里一个对称变换.  $r$  个文字  $1, 2, \dots, r$  的对称羣  $\mathfrak{S}_r$  里每个元素各与这些变换中一个联系. 如果  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ , 則  $\mathfrak{R}_r^0$  里相伴的映照記作  $P(\sigma)$ , 故由定义显然有

$$(23) \quad P(\sigma\tau) = P(\sigma)P(\tau).$$

令  $\alpha_\sigma$  表示用元素  $\alpha_\sigma$  作的純量乘法, 則如  $\sum \alpha_\sigma P(\sigma)$  形的綫性变换叫做  $\mathfrak{R}_r^0$  的一个对称算子. 由 (23) 知: 这些算子构成  $\mathfrak{R}_r^0$  里綫性变换的完全代数的一个子代数. 如果  $Q$  是一个对称算子, 則被  $Q$  零化的向量的集合是一个子空間; 更一般地說, 如果  $\{Q\}$  是对称算子的任意集合, 則对于所有  $Q$  使  $zQ = 0$  的各个向量  $z$  成一个子空間; 这个子空間叫做张量的一个对称类. 例如, 令集合  $\{Q\}$  是对称算子  $P(\sigma) - 1 \equiv P(\sigma) - P(1)$  ( $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ ) 的全体, 則这个对称类的张量是对称的, 亦即对于  $1, 2, \dots, r$  的任意排列  $i \rightarrow i'$  有

$$\sum x_{1'} \times x_{2'} \times \dots \times x_{r'} = \sum x_1 \times x_2 \times \dots \times x_r.$$

仿此, 如果  $\{Q\}$  是对称算子  $P(\sigma) = \epsilon_\sigma$  的集合, 这里  $\sigma$  是偶排列时, 取  $\epsilon_\sigma = 1$ , 而  $\sigma$  是奇排列时取  $\epsilon_\sigma = -1$ , 则集合  $\{Q\}$  决定斜称张量的类. 亦即对于  $\sigma: i \rightarrow i'$  具有

$$\sum x_{1'} \times x_{2'} \times \cdots \times x_{r'} = \epsilon_\sigma \sum x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_r$$

的张量的类.

对称算子在研究由基空间  $\mathfrak{R}$  里线性变换诱导出的  $\mathfrak{R}'_0$  里线性变换是特别重要的. 如果  $A$  是  $\mathfrak{R}$  里这样一个变换, 则由公式

$$(\sum x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_r) A'_0 = \sum x_1 A \times x_2 A \times \cdots \times x_r A$$

来定义“诱导”线性变换  $A'_0 \equiv A \times A \times \cdots \times A$ . 显然有关系

$$(24) \quad (AB)'_0 = A'_0 B'_0.$$

因为  $1'_0 = 1$ , 所以, 如果  $A$  有一个逆变换  $A^{-1}$ , 则  $A'_0 (A^{-1})'_0 = 1'_0 = 1$ . 于是, 如果  $A$  是满秩的, 则  $A'_0$  在  $\mathfrak{R}'$  的线性变换环  $\mathfrak{E}'_0$  里是满秩的. 方程(24)指出: 映照  $A \rightarrow A'_0$  是  $\mathfrak{E}'$  的单位群到  $\mathfrak{E}'_0$  的单位群里的一个同态.

由定义显然知,  $A'_0$  与每个对称变换可交换, 因此也与每个对称算子  $Q$  可交换. 如果  $zQ = 0$ , 则  $(zA'_0)Q = 0$ . 这个提示指出, 张量的任意对称类关于  $A'_0$  形状的映照的全体是一个不变子空间. 如果  $U(A)$  表示  $A'_0$  在一个特别对称类里的诱导线性变换, 则由(24)得关系  $U(AB) = U(A)U(B)$ .

今将讲述斜称张量的对称类的特殊情形. 我们也假定  $\Phi$  的特征数  $\neq 2$ . 首先决定这个对称类的一个基. 令

$$\sum \xi^{i_1 i_2 \cdots i_r} e_{i_1} \times e_{i_2} \times \cdots \times e_{i_r}$$

是斜称张量, 则

$$(25) \quad \begin{aligned} \sum \xi^{i_1 i_2 \cdots i_r} e_{i_{1'}} \times e_{i_{2'}} \times \cdots \times e_{i_{r'}} \\ = \epsilon_\sigma \sum \xi^{i_1 i_2 \cdots i_r} e_{i_1} \times e_{i_2} \times \cdots \times e_{i_r}, \end{aligned}$$

又因为  $\epsilon_\sigma^{-1} = \epsilon_\sigma$ , 这就推得

$$(26) \quad \xi^{i_1' i_2' \cdots i_r'} = \epsilon_\sigma \xi^{i_1 i_2 \cdots i_r}.$$

所以, 任意两个下标互换就改变支量  $\xi^{i_1 i_2 \cdots i_r}$  的符号. 这个结果的一个推论是: 如果任意两个  $i_i$  相等, 则  $\xi^{i_1 i_2 \cdots i_r} = 0$ . 特别是, 如果  $r > n$ , 则每个  $\xi^{i_1 i_2 \cdots i_r} = 0$ ; 亦即  $r(>n)$  秩的斜称张量只有 0 张

量。我們还知,不論  $r$  的值如何,斜称张量的表达式  $\sum \xi^{i_1 i_2 \cdots i_r} e_{i_1} \times \cdots \times e_{i_r}$  里有两个  $i_j$  相等的項  $e_{i_1} \times e_{i_2} \times \cdots \times e_{i_r}$  的系数为 0。所以这些項可以去掉。次設  $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ , 則系数  $\xi^{i_1 i_2 \cdots i_r} = \varepsilon_\sigma \xi^{i_1 i_2 \cdots i_r}$ 。所以, 包含所有基张量  $e_{i_1} \times e_{i_2} \times \cdots \times e_{i_r}$  的項合併为

$$(27) \quad \xi^{i_1 i_2 \cdots i_r} [e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}] \quad (i_1 < i_2 < \cdots < i_r),$$

这里

$$(28) \quad [e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}] = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} e_{i_{1'}} \times e_{i_{2'}} \times \cdots \times e_{i_{r'}}.$$

$[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}]$  显然是斜称的。还有, 如果  $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$  而  $(j_1, j_2, \cdots, j_r) \neq (i_1, i_2, \cdots, i_r)$ , 則  $[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}]$  含有基张量  $e_{i_{1'}} \times e_{i_{2'}} \times \cdots \times e_{i_{r'}}$  的一个集合, 它与集合  $e_{j_1} \times e_{j_2} \times \cdots \times e_{j_r}$  的交是空集合。所以, 由  $1, 2, \cdots, n$  中选取一切可能的下标  $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$  所决定的向量  $[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}]$  是綫性无关的。于是, 这些向量构成斜称张量的空間的一个基。这个基里元素的个数与由  $n$  个不同事物里选取  $r$  个不同事物的組合数相同。所以这个数目  $\binom{n}{r}$  是这个空間的維数。

我們把向量按下标  $i_1, i_2, \cdots, i_r$  作字典式編次。例如, 如果  $n = 3$  而  $r = 2$ , 則次序是  $[e_1 e_2], [e_1 e_3], [e_2 e_3]$ 。如果  $(\alpha)$  是綫性变换  $A$  关于基  $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$  的陣, 則  $A$  在  $r$  秩斜称张量的空間里的誘导綫性变换关于字典式有序基  $[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}]$  的陣叫做  $(\alpha)$  的第  $r$  复合陣, 記作  $C_r(\alpha)$ 。显然有关系

$$(29) \quad C_r((\alpha)(\beta)) = C_r(\alpha)C_r(\beta).$$

今将找  $C_r(\alpha)$  的显形状。因为  $e_i A = \sum \alpha_{ij} e_j$ , 故

$$\begin{aligned} [e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}] A &= \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} e_{i_{1'}} A \times e_{i_{2'}} A \times \cdots \times e_{i_{r'}} A \\ &= \sum_{\sigma} \sum_j \varepsilon_{\sigma} \alpha_{i_{1'} j_1} \alpha_{i_{2'} j_2} \cdots \alpha_{i_{r'} j_r} e_{j_1} \times e_{j_2} \times \cdots \times e_{j_r} \\ (30) \quad &= \sum_j \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_r j_r} e_{i_1} \times e_{i_2} \times \cdots \times e_{i_r} \end{aligned}$$

$$= \sum_j |\alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_r j_r}| (e_{j_1} \times e_{j_2} \times \cdots \times e_{j_r}),$$

这里  $|\alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_r j_r}|$  表示行列式

$$(31) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 j_1} & \alpha_{i_1 j_2} & \cdots & \alpha_{i_1 j_r} \\ \alpha_{i_2 j_1} & \alpha_{i_2 j_2} & \cdots & \alpha_{i_2 j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i_r j_1} & \alpha_{i_r j_2} & \cdots & \alpha_{i_r j_r} \end{vmatrix}.$$

如果任意两个  $j$  相等, 则这个行列式等于 0, 而对于不相等的  $j$ ,

$$|\alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_r j_r}| = \epsilon_0 |\alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_r j_r}|,$$

这里  $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ . 所以, (30) 可写为

$$[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}] A_0 = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_r} |\alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_r j_r}| [e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_r}].$$

这指出:  $C_r(\alpha)$  是一个阵, 它的元素是  $(\alpha)$  的  $r$ -行子式  $|\alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_r j_r}|$ .

如果  $r = n$ , 则斜称张量有基  $[e_1 e_2 \cdots e_n]$ , 阵  $C_n(\alpha) = \det(\alpha)$ . 此时(29)特殊化为行列式的乘法法则.

这些提示当作张量的对称类的丰富而稍复杂的理论的导引. 这方面的透辟论述见威尔 (Weyl) 著的古典群 (Classical Groups) 第 3, 4 两章 (也可参看威得朋 (Wedderburn) 著的阵论讲义 (Lectures on Matrices) 第 5 章).

## 習 題 60

1. 证明:  $[x_1 x_2 \cdots x_n] \equiv \sum \epsilon_{\alpha} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = |\xi_{11} \xi_{12} \cdots \xi_{nn}| [e_1 e_2 \cdots e_n]$ , 这里  $|\xi_{11} \xi_{12} \cdots \xi_{nn}|$  是  $x_i$  关于  $e_j$  的坐标的行列式.
2. 证明: 如果  $\alpha 1$  是纯量阵, 则  $C_r(\alpha 1) = \alpha^r 1$ .
3. 证明:  $\det C_r(\alpha) = (\det(\alpha))^{\binom{n-1}{r-1}}$ .

**8. 向量空间的域的扩张** 如果  $P$  是一个域, 它含有  $\Phi$  为子域, 则  $P$  可看作  $\Phi$  上向量空间. 可取域的加法为向量空间的加法, 取域的积为  $\alpha \in \Phi$  与  $\xi \in P$  的纯量乘法  $\alpha \xi$ . 向量空间的各公理是  $P$  的结合律与分配律及  $\Phi$  含有  $P$  的恒等元素的事实直接推论. 向量空间可为无限维的或有限维的. 例如, 如果  $P = \Phi(\lambda)$ , 这里  $\lambda$

是一个不定量, 則  $P$  是  $\Phi$  上无限維的. 另一方面, 如果  $P$  是复数域, 而  $\Phi$  是实数子域, 則  $P$  是  $\Phi$  上二維向量空間.

今令  $\mathfrak{R}$  是  $\Phi$  上一个向量空間, 并令  $\mathfrak{P} = P \times \mathfrak{R}$  是作为  $\Phi$  上向量空間的  $P$  与向量空間  $\mathfrak{R}$  的克伦内克积<sup>1)</sup>. 則  $\mathfrak{P}$  的元素的形状是  $\sum \rho_i \times x_i$ , 这里  $\rho_i \in P$ , 而  $x_i \in \mathfrak{R}$ . 令  $\sigma$  是  $P$  的任意元素, 因为  $\xi \rightarrow \sigma\xi$  是  $\Phi$  上  $P$  里一个綫性变换, 所以映照

$$\sum \rho_i \times x_i \mapsto \sum \sigma \rho_i \times x_i$$

是一个自同态. 使用这个結果并命

$$(32) \quad \sigma(\sum \rho_i \times x_i) = \sum \sigma \rho_i \times x_i$$

来定义  $\mathfrak{P}$  里一个純量乘法, 則我們曾証函数  $\sigma z$  是单值的, 并且  $\sigma(z_1 + z_2) = \sigma z_1 + \sigma z_2$ . 关于純量乘法的其它公理可直接验证. 所以,  $\mathfrak{P}$  可看作  $P$  上向量空間. 我們把  $\mathfrak{P}$  記作  $\mathfrak{R}_P$ , 并把由  $\mathfrak{R}$  得出的这个空間叫作扩张基域  $\Phi$  为域  $P$  的空間.

$P$  上  $\mathfrak{R}_P$  的維数易知与  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}$  的維数相同. 这因为, 令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}$  的一个基, 并令  $e_i = 1 \times e_i$ , 則  $\rho_i \times e_i = \rho_i(1 \times e_i) = \rho_i \bar{e}_i$ , 并且因为任意  $z \in \mathfrak{R}_P$  的形状为  $\sum \rho_i \times e_i$ , 所以它也有  $\sum \rho_i \bar{e}_i$  的形状. 同理, 如果  $\sum \rho_i \bar{e}_i = 0$ , 則  $\sum \rho_i \times e_i = 0$ , 并且因为  $e_i$  是  $\Phi$  上綫性无关的, 故每个  $\rho_i = 0$ .

对于每个  $x \in \mathfrak{R}$ , 命  $\bar{x} = 1 \times x$ , 則容易检查得对应  $x \rightarrow \bar{x}$  是  $\Phi$  上向量空間  $\mathfrak{R}$  与  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}_P$  的一个子空間  $\bar{\mathfrak{R}}$  之間的一个等价. 如果我們愿意的話, 則可用  $\mathfrak{R}_P$  的子集合  $\bar{\mathfrak{R}}$  代替空間  $\mathfrak{R}$ .  $\mathfrak{R}_P$  与  $\bar{\mathfrak{R}}$  之間的关系可用下面的說法述出:

1.  $\mathfrak{R}_P$  里任意向量的形状为  $\sum \rho_i \bar{x}_i$ , 这里  $\rho_i \in P$ , 而  $\bar{x}_i \in \bar{\mathfrak{R}}$ .
2. 如果向量  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) \in \bar{\mathfrak{R}}$ , 并且是  $\Phi$  上无关的, 則它們也是  $P$  上无关的.

今設  $A$  是  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}$  里一个綫性变换, 則知映照  $\sum \rho_i \times x_i \mapsto \sum \rho_i \times x_i A$  是  $\mathfrak{R}_P$  里一个自同态. 我們还立知, 它是  $P$  上  $\mathfrak{R}_P$  里一个綫性变换. 这个映照叫做  $A$  在  $\mathfrak{R}_P$  里的扩张. 我們用同样文字

1) 严格地說, 克伦内克积的存在到目前只在  $P$  是  $\Phi$  上有限維的情形証明了. 由第九章的論述, 使我們能够把构造法扩张到无限維情形.



表示一个映照与它的扩张。如果 $(\alpha)$ 是 $A$ 关于 $\mathfrak{R}$ 的基 $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ 的陣, 則

$$\begin{aligned}\bar{e}_i A &= (1 \times e_i) A = 1 \times e_i A = \sum 1 \times \alpha_{ij} e_j \\ &= \sum \alpha_{ij} (1 \times e_j) = \sum \alpha_{ij} \bar{e}_j.\end{aligned}$$

所以, 扩张的 $A$ 关于基 $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ 的陣也是 $(\alpha)$ .

**9. 关于陣集合的相似性的一个定理** 本节将証关于陣集合的一个定理, 这定理自身既有趣味, 并且可以說明陣及代數理論中一个有用方法. 这个方法的概念是: 如果基域取“充分大”(例如, 取代數閉域), 有时会使結果的証明較为容易. 所以, 我們可扩张基域以得出具有必要性質的域, 然后面对着問題指出最后結果在原有域上也成立.

我們要講述的特殊問題如次: 令 $\omega_1$ 及 $\omega_2$ 是元素属于 $\Phi$ 的陣的两个集合. 設它們借元素属于扩张域 $P$ 的一个陣而成相似, 則我們是否可推得这两个集合可借元素属于 $\Phi$ 的一个陣而成相似呢?

更确切地說, 我們从 $\Phi$ 上 $\mathfrak{R}$ 里綫性变換的集合 $\Omega$ 出发, 而考虑 $P$ 上 $\mathfrak{R}$ 里綫性变換的扩张. 令 $\omega$ 是这些扩张关于基 $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ 所决定的陣的集合, 这里 $\bar{e}_i = 1 \times e_i$ . 我們已知,  $\omega$ 里所有陣的元素属于域 $\Phi$ . 如果 $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 是 $P$ 上 $\mathfrak{R}_P$ 的任意基, 而 $u_i = \sum \mu_{ij} \bar{e}_j$ , 則 $\Omega$ 关于这个基的陣集合是 $(\mu)\omega(\mu)^{-1}$ . 通常, 其中有些陣的元素不属于 $\Phi$ , 但可能会有 $(\mu) \notin \Phi$ , 而集合 $(\mu)\omega(\mu)^{-1} \subseteq \Phi_n$ . 今將証明: 如果是这样的話, 則有 $L(\Phi, n)$ 里一个陣 $(\gamma)$ 存在, 使对于每个 $(\alpha) \in \omega$ 有

$$(\gamma)(\alpha)(\gamma)^{-1} = (\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}.$$

今将在 $\Phi$ 含有无限多元素的假定下証明这个結果<sup>1)</sup>.

**定理 5.** 令 $\Phi$ 是无限域, 并令 $\omega$ 是元素属于 $\Phi$ 的陣的一个集合. 設 $(\mu)$ 是 $L(P, n)$ 里一个陣使 $(\mu)\omega(\mu)^{-1} \subseteq \Phi_n$ , 这里 $P$ 是 $\Phi$

1) 关于 $\Phi$ 只含有限个元素情形的証明見杜宁 (Deuring) 的伽罗华理論及表示論 (Galoische Theorie und Darstellungstheorie), 載在数学紀事 (Math. Annalen), 卷 107, 第 140—144 頁.

的一个擴張, 則存在有一个陣  $(\gamma) \in L(\Phi, n)$  使对于每个  $(\alpha) \in \omega$  有  $(\gamma)(\alpha)(\gamma)^{-1} = (\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}$ .

証 用  $(\alpha)_\mu$  表示  $(\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}$ , 則

$$(\mu)(\alpha) = (\alpha)_\mu(\mu),$$

并且这些方程等价于  $(\mu)$  的元素  $\mu_{ij}$  的齐次綫性方程(可能无限个)組. 此外, 这些方程的系数属于  $\Phi$ , 亦即它們的形状是

$$\sum \beta_{ij} \mu_{ij} = 0 \quad (\beta_{ij} \in \Phi).$$

先把  $\{(\beta)\}$  看作  $\Phi_n$  的一个子集合, 并設  $r$  是这个集合的秩, 亦即  $r$  是  $\{(\beta)\}$  里(关于  $\Phi$ )綫性无关陣的最大个数, 則方程  $\sum \beta_{ij} \xi_{ij} = 0$  在  $\Phi$  里对于  $\xi_{ij}$  有  $n^2 - r$  个綫性无关解, 而使每个解都是这些解的綫性組合. 令  $(\gamma_{ij}^{(1)}), (\gamma_{ij}^{(2)}), \dots, (\gamma_{ij}^{(h)})$  是这样解的集合, 这里  $h = n^2 - r$ .

其次是指出: 如果元素属于  $\Phi$  的陣的一个集合是  $\Phi$  上綫性无关时, 則也是  $P$  上綫性无关. 这是显然的, 因为空間  $P_n$  是扩张空間  $\Phi_{nP}$ . 所以, 陣  $(\gamma_{ij}^{(1)}), \dots, (\gamma_{ij}^{(h)})$  是  $P$  上綫性无关的. 我們知道,  $r$  也是集合  $\{(\beta)\}$  关于  $P$  的秩, 并且方程  $\sum \beta_{ij} \xi_{ij}$  在  $P$  里的綫性无关解的最大个数也是  $n^2 - r$ . 所以, 我們所选的特殊解  $(\gamma_{ij}^{(1)}), \dots, (\gamma_{ij}^{(h)})$  构成  $P$  里解的基本集合. 特別是,

$$\mu_{ij} = v_1 \gamma_{ij}^{(1)} + v_2 \gamma_{ij}^{(2)} + \dots + v_h \gamma_{ij}^{(h)},$$

这里  $v_k \in P$ .

今以綫性无关的不定量  $\lambda_k$  代替  $v_k$ , 而考虑多項式

$$\det \left( \sum_k \lambda_k \gamma_{ij}^{(k)} \right).$$

因为这个多項式  $\in \Phi[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h]$ , 在  $\lambda_k = \mu_k$  时它的值是  $\det(\mu) \neq 0$ , 所以它不是 0 多項式. 因为  $\Phi$  是无限域, 故可在  $\Phi$  里选取值  $\lambda_k = \beta_k$  使  $\det(\sum \beta_k \gamma_{ij}^{(k)}) \neq 0$ <sup>1)</sup>. 令  $\gamma_{ij} = \sum \beta_k \gamma_{ij}^{(k)}$ , 并且令  $(\gamma) = (\gamma_{ij})$ , 則  $(\gamma) \in L(\Phi, n)$ , 并且对于所有  $\beta$ ,  $\sum \beta_{ij} \gamma_{ij} = 0$ . 所以, 对于所有  $(\alpha)$ ,

1) 参看本书第一卷, 第三章, § 12 的定理 10.

$$(\gamma)(\alpha) = (\alpha)_\mu(\gamma),$$

而 $(\gamma)$ 适合定理的要求.

### 習題 61

1. 如果 $\omega$ 是由单一陣所成的集合,而对于 $\Phi$ 不加任何条件,証明定理5.

**10. 代数的另一定义. 代数的克伦内克积** 結合代数的概念已在第二章介紹过. 今将看到借克伦内克积的概念可給出代数的另一个簡單定义. 我們觉得去掉結合律把前面的討論推广是有好处的. 于是,前此的定义就改为下面形状:一个(无須可結合的)代数 $\mathfrak{A}$ 是域 $\Phi$ 上一个向量空間,在 $\mathfrak{A}$ 里兼有一个二元乘法 $xy$ 使

$$(33) \quad (x_1 + x_2)y = x_1y + x_2y, \quad x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2.$$

$$(34) \quad \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

条件(33)及(34)里最后的等式說明 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{A}$ 关于乘法 $xy$ 的一个积空間. 故知映照 $\sum x \times y \rightarrow \sum xy$ 是克伦内克积 $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}$ 內的一个綫性变换.

这个提示用作代数的第二个定义的基础. 根据这个提示,我們定义一个代数是域 $\Phi$ 上一个向量空間兼有 $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}$ 內的一个綫性变换 $P$ . 在这样定义的代数里,可用公式

$$(35) \quad xy = (x \times y)P$$

引入一个二元积. 我們易知,(33)与(34)是成立的. 所以,这样步驟显然导致与前面定义相同的概念.

次設 $\mathfrak{A}_1$ 及 $\mathfrak{A}_2$ 同是域 $\Phi$ 上的任意代数. 令 $P_i$ 是 $\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{A}_i$ 到 $\mathfrak{A}_i$ 內的綫性映照,則 $x_i y_i = (x_i \times y_i)P_i$ . 今作克伦内克积 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ ,并考虑这个空間与它自身的克伦内克积 $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ . 我們知道,如果 $x_1, y_1 \in \mathfrak{A}_1$ 而 $x_2, y_2 \in \mathfrak{A}_2$ ,則映照

$$(36) \quad \sum x_1 \times x_2 \times y_1 \times y_2 \rightarrow \sum x_1 \times y_1 \times x_2 \times y_2$$

是 $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ 到 $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_2$ 的一个等价. 再則

$$(37) \quad \sum x_1 \times y_1 \times x_2 \times y_2 \rightarrow \sum (x_1 \times y_1)P_1 \times (x_2 \times y_2)P_2$$

是 $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_2$ 到 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ 內一个綫性映照. 合并(36)

与(37), 得  $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$  到  $\mathfrak{U}$  内的一个綫性映照  $P$ . 故  $\mathfrak{U}$  带着映照  $P$  组成域  $\Phi$  上一个代数. 如果  $\sum x_1 \times x_2$  与  $\sum y_1 \times y_2$  是  $\mathfrak{U}$  的两个元素, 則  $\mathfrak{U}$  里它們的积是

$$(38) \quad (\sum x_1 \times x_2)(\sum y_1 \times y_2) = \sum x_1 y_1 \times x_2 y_2;$$

这因为, 由定义得

$$\begin{aligned} (\sum x_1 \times x_2 \times y_1 \times y_2)P &= \sum (x_1 \times y_1)P_1 \times (x_2 \times y_2)P_2 \\ &= \sum x_1 y_1 \times x_2 y_2. \end{aligned}$$

这样定义的代数叫做  $\mathfrak{U}_1$  与  $\mathfrak{U}_2$  的克伦内克积或直接积. (38)的一个直接推論是: 如果  $\mathfrak{U}_1$  及  $\mathfrak{U}_2$  是結合代数, 則克伦内克积  $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$  是結合代数.

作为代数的克伦内克积的概念的說明, 今述定理 4 的下面扩张.

**定理 6.** 代数  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}, \mathfrak{R} \times \mathfrak{S}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) \times \mathfrak{L}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ .

証 我們已知这个关系在向量空間意义下成立. 我們还有关系  $(A \times B)(C \times D) = AC \times BD$ , 而这个关系指出,  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}, \mathfrak{R} \times \mathfrak{S})$  里通常的积与两个代数的克伦内克积里定义的合成重合.

与这个結果略为不同的形状是

$$\text{系 } \Phi_{mn} = \Phi_m \times \Phi_n.$$

## 習 題 62

1. 令  $a$  是代数  $\mathfrak{U}$  的一个元素, 并令  $R_a$  表示由  $a$  决定的映照  $x \rightarrow xa$ . 証明:  $R_a$  是  $\mathfrak{U}$  里一个綫性变换; 还証明: 映照  $a \rightarrow R_a$  是  $\mathfrak{U}$  到由  $\mathfrak{U}$  里所有綫性变换組成的空間  $\mathfrak{L}$  內的一个綫性变换.

2. 令  $L_a$  表示映照  $x \rightarrow ax$ . 証明:  $L_a$  是  $\mathfrak{U}$  里一个綫性变换, 而  $a \rightarrow L_a$  是綫性映照.

3. 証明:  $\mathfrak{U}$  是結合的必須而且只須对于所有  $a, b$  有  $L_a R_b = R_b L_a$ ; 还証明:  $\mathfrak{U}$  是結合的必須而且只須  $R_a R_b = R_{ab}$  ( $L_a L_b = L_{ba}$ ).

4. 令  $\mathfrak{U}$  是以  $1, i, j, k$  为基的实四維数代数, 这里

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

証明:  $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \cong \Phi_4$ .

## 第 八 章

### 線 性 變 換 環

我們在本章里獲得有限維向量空間的所有線性變換的環  $\mathfrak{L}$  的基本性質。我們決定這個環的雙側、左及右理想。我們還指出：分別由向量空間  $\mathfrak{R}_1$  與  $\mathfrak{R}_2$  決定的兩個環  $\mathfrak{L}_1$  與  $\mathfrak{L}_2$  不是同構的，除非它們所施為的空間是同構的。在討論  $\mathfrak{L}$  的自同構時，導致考慮一種重要的變換類型，叫做半線性變換，它推廣了線性變換的概念。

**1.  $\mathfrak{L}$  的單純性** 我們將要看到研究除環  $\Delta$  上向量空間  $\mathfrak{R}$  里所有線性變換的環  $\mathfrak{L}$  的方法有多種。我們要考慮的第一種是把  $\mathfrak{L}$  作為一個陣環。我們引入由  $\mathfrak{R}$  的一個特殊基  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  決定的“陣單位”  $E_{ij}$  的集合。定義  $E_{ij}$  是能使

$$(1) \quad e_r E_{ij} = \delta_{ir} e_j \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

的線性映照。由基向量的核對可驗證

$$(2) \quad \begin{aligned} E_{ij} E_{kl} &= \delta_{jk} E_{il}, \\ \sum E_{ii} &= 1. \end{aligned}$$

次引入與陣  $\text{diag} \{ \alpha, \alpha, \dots, \alpha \}$  的集合對應的線性變換的集合  $\bar{\Delta}$ 。這些陣是由與  $\Delta$  里每個  $\alpha$  相伴的線性映照  $\bar{\alpha}$  得出，這裡  $\bar{\alpha}$  使

$$(3) \quad e_i \bar{\alpha} = \alpha e_i.$$

必須指出， $\bar{\alpha}$  對於  $e_i$  的作用雖然與純量乘法  $\alpha_i$  相同，但這些變換通常不是恆等的；這因為，如果  $x = \sum \xi_i e_i$ ，則  $\alpha x = \sum (\alpha \xi_i) e_i$ ，而

$$x \bar{\alpha} = \sum (\xi_i e_i) \bar{\alpha} = \sum \xi_i (e_i \bar{\alpha}) = \sum (\xi_i \alpha) e_i.$$

所以  $\bar{\alpha} = \alpha_i$  必須而且只須  $\alpha$  屬於  $\Delta$  的心。我們還注意到  $\bar{\alpha}$  與基的選擇及與  $\alpha$  有關；由於我們大部分只附着一個基，所以與基的相關性無須表白。

綫性變換與陣之間的基本對應把陣  $\text{diag}\{\alpha, \alpha, \dots, \alpha\}$  與  $\bar{\alpha}$  相伴。這些陣的全部是  $\Delta_n$  的一個子環，與  $\Delta$  同構。所以， $\Delta$  是  $\mathfrak{L}$  的一個子環與  $\Delta$  同構，而對應  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  是一個同構。

容易驗證，

$$(4) \quad \bar{\alpha} E_{ij} = E_{ij} \bar{\alpha},$$

並且如果  $e_i A = \sum \alpha_{ij} e_j$ ，則

$$(5) \quad A = \sum \bar{\alpha}_{ij} E_{ij} = \sum E_{ij} \bar{\alpha}_{ij}.$$

故任意  $A \in \mathfrak{L}$  可寫成  $E_{ij}$  的綫性組合，係數  $\in \Delta$ 。對於表达式  $A = \sum \bar{\alpha}_{ij} E_{ij}$  的係數還有重要公式

$$(6) \quad \bar{\alpha}_{ij} = \sum_k E_{ki} A E_{jk}.$$

這個公式使我們能夠簡單地證明： $\mathfrak{L}$  是一個單純環，亦即證明： $\mathfrak{L}$  里雙側理想僅有 0 及  $\mathfrak{L}$  自身。今令  $\mathfrak{B}$  是  $\mathfrak{L}$  里一個非零的雙側理想，並令  $B = \sum \bar{\beta}_{ij} E_{ij}$  是  $\mathfrak{B}$  里非零元素，則每個  $\bar{\beta}_{ij} = \sum E_{ki} B E_{jk} \in \mathfrak{B}$ 。如果  $\bar{\beta}_{pq} \neq 0$ ，則  $1 = \bar{\beta}_{pq} \bar{\beta}_{pq}^{-1}$  也屬於  $\mathfrak{B}$ ，並且由此可推得  $\mathfrak{L}$  里每個  $A$  含於  $\mathfrak{B}$  里。所以， $\mathfrak{B} = \mathfrak{L}$ 。

**定理 1.** 有限維向量空間里綫性變換環  $\mathfrak{L}$  是單純環。

### 習題 63

1. 證明： $\Delta$  是與  $E_{ij}$  可交換的綫性變換的全体。

**2. 算子方法** 今將用算子方法給  $\mathfrak{L}$  的單純性以另一種證明。令  $\mathfrak{B}$  是  $\mathfrak{L}$  里一個非零的雙側理想。先證：如果  $[x]$  是  $\mathfrak{R}$  的任意一維子空間，則  $\mathfrak{B}$  含有  $\mathfrak{R}$  在  $[x]$  上的射影  $E$ 。令  $B \neq 0$  屬於  $\mathfrak{B}$ ，並令  $\mathfrak{R}B = [y_1, y_2, \dots, y_r]$ ，這裡  $y_i$  是綫性無關的。令  $x_1$  是使  $x_1 B = y_1$  的一個向量。我們可找得一個綫性變換  $A_1$  使  $y_1 A_1 = x_1$  而  $i > 1$  時  $y_i A_1 = 0$ 。於是， $x_1 B A_1 = y_1 A_1 = x_1$ 。所以， $E_1 \equiv B A_1$  是  $\mathfrak{R}$  在  $[x_1]$  上的一個射影。今令  $C$  及  $D$  是綫性變換使  $x C = x_1$  及  $x_1 D = x$ 。於是，如果  $E = C E_1 D$ ，則  $\mathfrak{R} E = \mathfrak{R} C E_1 D = [x_1] D = [x]$  而  $x E = x C E_1 D = x_1 E_1 D = x_1 D = x$ 。所以， $E$  是  $\mathfrak{R}$  在  $[x]$  上的一個射影，因為  $E = C E_1 D$ ，故  $E \in \mathfrak{B}$ 。

今令  $E$  是  $\mathfrak{B}$  里有极大秩的一个射影, 则可断言  $E = 1$ . 否則,  $\mathfrak{S} = \Re E \subset \Re$ , 并且有非零向量  $z$  存在使  $zE = 0$ . 因为我們已知,  $\mathfrak{B}$  含有  $\Re$  在  $[z]$  上一个射影  $F$ . 今令  $G = E + F - EF$ . 如果  $x \in \mathfrak{S}$ , 則

$$xG = xE + xF - xEF = x + xF - xF = x.$$

再則,

$$zG = zE + zF - zEF = zF = z.$$

故  $G$  在  $\mathfrak{S} + [z]$  里有恆等映照的作用. 于是,  $\Re G \supset \Re E + \Re F = \mathfrak{S} + [z]$ . 所以,  $G$  是比  $E$  有較大的秩的射影. 因为  $G \in \mathfrak{B}$ , 这与  $E$  的选择矛盾. 故知  $E = 1 \in \mathfrak{B}$ . 这显然意味着  $\mathfrak{B} = \mathfrak{L}$ .

使用类似方法可証下面的定理.

**定理 2.** 如果  $\mathfrak{L}$  是  $\Delta$  上  $\Re$  里綫性變換的環, 則反过來  $\Delta$  是与  $\mathfrak{L}$  里所有變換可交換的  $\Re$  里自同態的整个集合.

証 令  $C$  是与  $\mathfrak{L}$  的每个元素可交換的  $\Re$  里一个自同態. 如果  $x$  是  $\Re$  里任意向量, 則  $x$  与  $xC$  是綫性相关的. 否則存在有一个  $A \in \mathfrak{L}$  使  $xA = 0$ , 但  $(xC)A \neq 0$ . 这就与  $0 = (xA)C = xCA$  矛盾. 故对于每个  $x \neq 0$  有  $xC = \gamma_x x$ . 今令  $x$  及  $y$  是任意两个非零向量, 則

$$xC = \gamma_x x, \quad yC = \gamma_y y.$$

另一方面有一个  $B \in \mathfrak{L}$  存在使  $xB = y$ . 于是,

$$yC = xBC = xCB = \gamma_x(xB) = \gamma_x y.$$

故  $\gamma_x = \gamma_y$ . 这証明对于所有非零的  $x$  有  $xC = \gamma_x x$ . 因为这对于  $x = 0$  也成立, 故  $C$  是純量乘法  $\gamma_1$ .

**3.  $\mathfrak{L}$  的左理想** 要决定  $\mathfrak{L}$  的单側理想, 我們將使用另一个技术, 即把  $\mathfrak{L}$  作为一个积羣来考虑. 令  $\Re'$  是关于双綫性形式  $g(x, x')$  与  $\Re$  对偶的一个右向量空間. 如同前章定义  $x' \times y$  为映照  $x \rightarrow g(x, x')y$ , 这里  $x' \in \Re'$  而  $y \in \Re$ ; 則知  $\mathfrak{L}$  关于这个乘法是直接积  $\Re' \times \Re$ .

今考虑两个映照  $x' \times y$  及  $u' \times v$  的积的表示法, 則有下面的方程:

$$\begin{aligned}
x[(x' \times y)(u' \times v)] &= g(x, x')y(u' \times v) \\
&= g(g(x, x')y, u')v \\
&= g(x, x')g(y, u')v \\
&= g(x, x'g(y, u'))v,
\end{aligned}$$

这指出

$$(x' \times y)(u' \times v) = x'g(y, u') \times v = x' \times g(y, u')v.$$

更一般地, 如果使用分配律, 则知

$$\begin{aligned}
(7) \quad (\sum x'_i \times y_i)(\sum u'_j \times v_j) &= \sum x'_i g(y_i, u'_j) \times v_j \\
&= \sum x'_i \times g(y_i, u'_j)v_j.
\end{aligned}$$

这个基本乘法法则指出怎样在  $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{R}$  里作单侧理想, 令  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  的任意子空间, 并令  $\mathfrak{S}' = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$  是形状如  $\sum u'_i \times v_i$  的线性变换的全体, 这里  $u_i \in \mathfrak{R}'$  而  $v_i \in \mathfrak{S}$ . 显然  $\mathfrak{S}'$  在加法与减法下是闭的. 由(7)还知,  $\mathfrak{S}'$  在由  $\mathfrak{L}$  的任意元素所作的左乘法下封闭. 故  $\mathfrak{S}'$  是一个左理想. 仿此可见, 如果  $\mathfrak{S}'$  是  $\mathfrak{R}'$  的一个子空间, 则映照  $\sum x'_i \times y_i$  的全体  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$  是  $\mathfrak{L}$  里一个右理想, 这里  $x'_i \in \mathfrak{S}'$  而  $y_i \in \mathfrak{R}$ .

我们要证的主要结果是: 理想  $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$  与  $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$  是  $\mathfrak{L}$  里仅有的单侧理想. 先考虑左理想. 令  $\mathfrak{S}'$  是  $\mathfrak{L}$  里任意非零左理想, 并令  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{S}'$  里  $B$  的所有秩子空间  $\mathfrak{R}B$  的联合. 如果  $B \neq 0$ , 则可写  $B = \sum_1^r u'_i \times v_i$ , 这里  $r$  是  $B$  的秩. 于是, 易知集合  $(v_1, v_2, \dots, v_r)$  是  $\mathfrak{R}B$  的一个基, 而  $(u'_1, u'_2, \dots, u'_r)$  是  $\mathfrak{R}'B'$  的一个基, 这里  $B'$  是  $B$  的折转<sup>1)</sup>. 因为  $v_i \in \mathfrak{R}B \subseteq \mathfrak{S}$ , 所以  $B \in \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ . 于是,  $\mathfrak{S}' \subseteq \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ . 次令  $y_1, y_2, \dots, y_r$  是使  $g(y_i, u'_j) = \delta_{ij}$  的向量, 并令  $x'_1, x'_2, \dots, x'_r$  是  $\mathfrak{R}'$  里任意向量. 命  $A = \sum x'_i \times y_i$ , 则由(7)得

$$(8) \quad AB = \sum x'_i g(y_i, u'_j) \times v_j = \sum x'_i \times v_i,$$

而这个线性变换属于  $\mathfrak{S}'$ . 这证明: 如果  $v = \sum \beta_i v_i$  是  $\mathfrak{R}B$  里任意

1) 参看第五章的 §5.



向量, 而  $x'$  是  $\mathfrak{R}'$  里任意向量. 則映照  $x' \times v = \sum x'_i \beta_i \times v_i \in \mathfrak{S}'$ . 我們还得: 如果  $B_1, B_2, \dots$  是  $\mathfrak{S}'$  里任意綫性變換, 而  $v^{(k)}$  是  $\mathfrak{R}B_k$  里任意向量, 則  $\sum x'_k \times v^{(k)} \in \mathfrak{S}'$ . 故  $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}'$ , 而这証明了下面的定理.

**定理 3.**  $\mathfrak{L}$  里每个左理想  $\mathfrak{S}'$  的形狀为  $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ , 这里  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  的一个子空間. 子空間  $\mathfrak{S}$  事实上是所有秩空間  $\mathfrak{R}B$  的併集, 这里  $B \in \mathfrak{S}'$ .

这个結果也可用另一种方式列出. 令  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  的任意子空間. 定义  $\mathfrak{S}'(\mathfrak{S})$  是  $\mathfrak{L}$  里使  $\mathfrak{R}B \subseteq \mathfrak{S}$  的  $B$  的全体; 显然  $\mathfrak{S}'(\mathfrak{S})$  是  $\mathfrak{L}$  里一个左理想. 另一方面, 令  $\mathfrak{S}'$  是  $\mathfrak{L}$  里任意左理想, 并且如前令  $\mathfrak{S}$  是所有子空間  $\mathfrak{R}B$  的併集, 这里  $B \in \mathfrak{S}'$ . 显然  $\mathfrak{S}' \subseteq \mathfrak{S}'(\mathfrak{S})$ , 并且定理 3 指出  $\mathfrak{S}' = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ . 今令  $B \in \mathfrak{S}'(\mathfrak{S})$ , 則  $\mathfrak{R}B \subseteq \mathfrak{S}$ , 并且如果  $\mathfrak{R}B = [v_1, v_2, \dots, v_r]$ , 这里  $v_i$  是綫性无关的, 則  $B = \sum \alpha'_i \times v_i$ . 于是,  $v_i \in \mathfrak{S}$ , 而  $B \in \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$ . 故  $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}'(\mathfrak{S})$ . 于是定理 3 有下面的另一个形状.

**定理 4.**  $\mathfrak{L}$  里每个左理想  $\mathfrak{S}'$  的形狀为  $\mathfrak{S}'(\mathfrak{S})$ , 这里  $\mathfrak{S}'(\mathfrak{S})$  是把  $\mathfrak{R}$  映到一个子空間  $\mathfrak{S}$  內的綫性變換的全体. 空間  $\mathfrak{S}$  是属于  $\mathfrak{S}'$  的映照的秩空間的併集.

定理 3 (或 4) 在  $\mathfrak{R}$  的子空間的集合与  $\mathfrak{L}$  的左理想的集合之間建立一个 1—1 对应  $\mathfrak{S} \mapsto \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S} (\mathfrak{S}'(\mathfrak{S}))$ . 这个对应显然保持次序: 如果  $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2$ , 則  $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}_2$ . 故得  $\mathfrak{R}$  的子空間格到  $\mathfrak{L}$  的左理想格的一个格同构.

## 習 題 64

1. 如果  $\mathfrak{S}'$  是一个非零左(右, 双侧)理想, 而不能存在有左(右, 双侧)理想  $\mathfrak{S}''$  使  $\mathfrak{S}' \supset \mathfrak{S}'' \supset 0$ , 則  $\mathfrak{S}'$  叫做极小左(右, 双侧)理想. 証明:  $\mathfrak{L}$  拥有极小左理想, 并找它們的形状.

2. 如果  $\mathfrak{S}'$  是一个左(右, 双侧)理想,  $\neq \mathfrak{L}$ , 并且不能存在有左(右, 双侧)理想  $\mathfrak{S}''$  使  $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}'' \subset \mathfrak{L}$ , 則  $\mathfrak{S}'$  叫做极大左(右, 双侧)理想. 証明:  $\mathfrak{L}$  拥有极大左理想, 并找它們的形状.

3. 証明: 如果  $\mathfrak{S}'$  是陣环  $\Delta_n$  里一个左理想, 这里  $\Delta$  是一个除环, 則  $L(\Delta, n)$  里有一个陣  $(\mu)$  存在使  $(\mu) \mathfrak{S}' (\mu)^{-1}$  是形状如

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2r} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nr} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

的陣的集合, 这里  $\alpha_{ij}$  是任意的.

4. 証明:  $\mathfrak{L}$  的每个左理想是由同势元素  $B$  生成的一个主理想  $\mathfrak{L}B$ .

**4. 右理想** 如果  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{L}$  里一个右理想, 則折轉  $B'$  的集合  $\mathfrak{S}'$  是对偶空間  $\mathfrak{R}'$  里綫性变换环  $\mathfrak{L}'$  的一个左理想, 这里  $B \in \mathfrak{S}$ . 还有  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{S}'$  里映照的折轉的集合. 所以我們可由  $\mathfrak{S}'$  的形状演繹出  $\mathfrak{S}$  的形状. 如果把定理 3 应用到  $\mathfrak{S}'$ , 則知  $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}' \times' \mathfrak{R}$ , 它是映照  $\sum x'_i \times' y_i$  的全体, 这里  $x'_i \in \mathfrak{S}'$  而  $y_i \in \mathfrak{R}$ , 并且  $\sum x'_i \times' y_i$  表示映照

$$(9) \quad x' \rightarrow \sum x'_i g(y_i, x').$$

所以  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{L}$  里映照

$$(10) \quad x \rightarrow \sum g(x, x'_i) y_i$$

的全体, 故  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$ . 于是得下面的定理.

**定理 5.**  $\mathfrak{L}$  里每个右理想  $\mathfrak{S}$  的形状为  $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$ , 这里  $\mathfrak{S}'$  是  $\mathfrak{R}'$  的一个子空間.

在  $\mathfrak{R}$  的子空間与  $\mathfrak{L}$  的右理想之間还可得一个对应. 要达到这个目的, 考虑  $\mathfrak{R}$  里向量  $y$  的子空間  $\mathfrak{S} = j(\mathfrak{S}')$  使对于  $\mathfrak{S}'$  里所有  $y'$ ,  $g(y, y') = 0$ . 如果  $y \in \mathfrak{S}$  而  $B \in \mathfrak{S}$ , 則由 (10) 得  $yB = 0$ . 如果  $z$  是任意向量对于  $\mathfrak{S}$  里所有  $B$  也使  $zB = 0$ , 則对于所有  $x'_i \in \mathfrak{S}$  及所有  $y_i \in \mathfrak{R}$ ,  $\sum g(z, x'_i) y_i = 0$ . 如果选  $y_i$  是綫性无关的, 則由此可推得  $g(z, x'_i) = 0$ . 故  $z \in \mathfrak{S}$ . 于是  $\mathfrak{S}$  的特点可說是被  $\mathfrak{S}$  里每个  $B$  所零化的向量的全体. 次設  $C$  是对于所有  $y \in \mathfrak{S}$  能使  $yC = 0$  的任意綫性变换; 写下  $C = \sum x'_i \times y_i$ , 这里  $y_i$  是綫性无关的. 則  $0 = yC = \sum g(y, x'_i) y_i$ , 因此对于所有  $y \in \mathfrak{S}$ ,  $g(y, x'_i) = 0$ . 所以,  $x'_i \in j(\mathfrak{S}) = j(j(\mathfrak{S}')) = \mathfrak{S}'$ , 而  $C \in \mathfrak{S}$ . 故还看出  $\mathfrak{S}$  是把  $\mathfrak{S}$  里每个向量零化的綫性变换的全体, 記作  $\mathfrak{S}(\mathfrak{S})$ . 这証明了以下定理.

**定理 6.**  $\mathfrak{L}$  里每个右理想  $\mathfrak{S}$  的形状为  $\mathfrak{S}(\mathfrak{S})$ , 这是零化一个子空間  $\mathfrak{S}$  的綫性变换的集合. 子空間  $\mathfrak{S}$  是被每个  $B \in \mathfrak{S}$  所零化的向

量的全体.

因为  $\mathfrak{G}'$  是  $\mathfrak{R}'$  里任意子空间, 故  $\mathfrak{G}$  是  $\mathfrak{R}$  里任意子空间. 如果  $\mathfrak{G}$  是  $\mathfrak{R}$  的任意子空间, 在开始时显见零化  $\mathfrak{G}$  的线性变换的全体  $\mathfrak{S} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$  是  $\mathfrak{L}$  里一个右理想. 上面论证指出: 被  $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$  里每个映照所零化的向量只是  $\mathfrak{G}$  里的向量. 我们还会证得: 每个右理想的形状为  $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ . 故  $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$  是  $\mathfrak{R}$  的子空间的集合与  $\mathfrak{L}$  里右理想的集合之间的 1—1 对应. 显然这个对应是逆序的, 亦即: 如果  $\mathfrak{G}_1 \supseteq \mathfrak{G}_2$ , 则  $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_1) \subseteq \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_2)$ .

### 习 题 65

1. 说出并且证明习题 64 里各题关于右理想的类似结果.
2. 证明: 如果  $\mathfrak{S}'$  是一个非零左理想, 则被  $\mathfrak{S}'$  里所有线性变换零化的向量只是  $\mathbf{z} = 0$ .
3. 使用定理 6 及前题证明  $\mathfrak{L}$  是单纯的.

**5. 线性变换环的同构** 令  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{L}$  里一个非零右理想, 则有一个向量  $x$  存在使象  $x\mathfrak{B}$  的集合  $x\mathfrak{S}$  不是 0, 这里  $B \in \mathfrak{S}$ . 如果  $B_1$  及  $B_2$  属于  $\mathfrak{S}$ , 则

$$(11) \quad x(B_1 + B_2) = xB_1 + xB_2.$$

所以, 映照  $B \rightarrow xB$  是  $\mathfrak{S}$  的加法群到  $\mathfrak{R}$  内的一个同态. 故在这个同态下象  $x\mathfrak{S}$  是群  $\mathfrak{R}$  的一个子群. 今将证  $x\mathfrak{S}$  事实上是整个  $\mathfrak{R}$ . 首先要讲  $x\mathfrak{S}$  由每个  $A \in \mathfrak{L}$  映到它自身; 这因为, 如果  $y \in x\mathfrak{S}$ , 则对于某些  $B \in \mathfrak{S}$  有  $y = xB$ , 而  $yA = xBA = xB'$ , 这里  $B' = BA \in \mathfrak{S}$ . 所以,  $yA \in x\mathfrak{S}$ .

次要讲  $x\mathfrak{S}$  在纯量乘法下是闭的. 如果  $\alpha \in \Delta$ , 则  $\mathfrak{L}$  里有一个  $A$  存在使  $yA = \alpha y$ . 于是,  $\alpha y = yA$  属于  $x\mathfrak{S}$ . 故知  $x\mathfrak{S}$  是一个非零子空间, 在  $\mathfrak{L}$  下不变. 我们已知<sup>1)</sup>, 这种子空间只有  $\mathfrak{R}$  自身, 故得下面的引理.

**引理 1.** 如果  $\mathfrak{S}$  是一个非零右理想, 而  $x$  是使  $x\mathfrak{S} \neq 0$  的一个向量, 则  $x\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$ .

---

1) 参看第四章, § 1.

其次,我們看出 映照  $B \mapsto xB$  不只是羣同態,亦即它是一个算子或模同態;这只是意味着

$$(12) \quad BA \mapsto (xB)A,$$

因为  $(xB)A = x(BA)$ , 所以这是显然的. 于是,如果以  $\chi$  表示这个映照,則(12)說明

$$(13) \quad (BA)\chi = (B\chi)A,$$

这个方程对于所有  $B \in \mathfrak{S}$  及所有  $A \in \mathfrak{A}$  成立.

方程(13)指出:同態  $\chi$  的核不只是  $\mathfrak{S}$  的加法羣的一个子羣,而是环  $\mathfrak{S}$  的一个右理想;这因为,如果  $B\chi = 0$ , 則  $(BA)\chi = (B\chi)A = 0A = 0$ . 所以,如果  $\mathfrak{S}$  是一个极小右理想,則  $\chi$  的核是 0;这就是說:  $\chi$  是一个同構.

**引理 2.** 如果  $\mathfrak{S}$  是一个极小右理想,而  $x\mathfrak{S} \neq 0$ , 則同態  $\chi: B \mapsto xB$  是  $\mathfrak{S}$  到  $x\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$  上的一个同構.

如果  $\chi^{-1}$  表示  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{S}$  上的逆映照,而  $A_r$  表示  $\mathfrak{S}$  里右乘法  $B \mapsto BA$ , 則由(13)得  $A_r\chi = \chi A_r$ , 故

$$(13') \quad A_r = \chi A_r \chi^{-1}.$$

向量空間与  $\mathfrak{S}$  的任意极小右理想之間的这个关系給出即将介紹的綫性变换环上若干可注意結果的基本理由. 第一个結果是下面的定理.

**定理 7.** 令  $\mathfrak{R}_i (i = 1, 2)$  是除环  $\Delta_i$  上一个向量空間,并令  $\mathfrak{L}_i$  是  $\Delta_i$  上  $\mathfrak{R}_i$  里綫性变换的環;如果  $\mathfrak{L}_1$  同構于  $\mathfrak{L}_2$ , 則  $\Delta_1$  同構于  $\Delta_2$  而两个空間有相同維数.

証 令  $\phi$  是  $\mathfrak{L}_1$  到  $\mathfrak{L}_2$  上的一个同構,并令  $\mathfrak{S}_1$  是  $\mathfrak{L}_1$  里一个极小右理想,則象  $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1\phi$  是  $\mathfrak{L}_2$  里一个极小右理想. 令  $\chi_i$  是上面定义的  $\mathfrak{S}_i$  到  $\mathfrak{R}_i$  上的一个同構;如果  $A_i \in \mathfrak{L}_i$ , 則

$$(14) \quad A_{1r} = \chi_1 A_1 \chi_1^{-1}, \quad A_{2r} = \chi_2 A_2 \chi_2^{-1}.$$

如果  $B_1 \in \mathfrak{S}_1$ , 則还有  $(B_1 A_1)\phi = (B_1\phi)(A_1\phi)$ . 所以  $A_{1r}\phi = \phi(A_1\phi)_r$ , 这里  $A_1\phi$  表示  $A_1$  在  $\phi$  下的象(在这个証明中都使用这样表示,不再說明). 于是,

$$(15) \quad (A_1\phi)_r = \phi^{-1} A_{1r} \phi.$$

合併(14)与(15)得

$$\begin{aligned} A_1\phi &= \chi_2^{-1}(A_1\phi)\chi_2 = \chi_2^{-1}\phi^{-1}A_1\phi\chi_2 \\ &= (\chi_2^{-1}\phi^{-1}\chi_1)A_1(\chi_1^{-1}\phi\chi_2). \end{aligned}$$

因为  $\chi_1^{-1}$  是  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{S}_1$  上的一个同构,  $\phi$  是  $\mathfrak{S}_1$  到  $\mathfrak{S}_2$  上的一个同构, 而  $\chi_2$  是  $\mathfrak{S}_2$  到  $\mathfrak{R}_2$  上的一个同构, 所以映照  $U = \chi_1^{-1}\phi\chi_2$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  上的一个同构, 我們又已証了

$$(16) \quad A_1\phi = U^{-1}A_1U.$$

今令  $\alpha_{1l}$  表示  $\mathfrak{R}_1$  上一个純量乘法, 因为  $\alpha_{1l}$  与每个  $A_1 \in \mathfrak{L}_1$  可交换, 故  $U^{-1}\alpha_{1l}U$  与每个  $A_1\phi$  可交换; 从而与每个  $A_2 \in \mathfrak{L}_2$  可交换, 由定理 2 知, 这可推得  $U^{-1}\alpha_{1l}U$  是  $\mathfrak{R}_2$  里一个純量乘法. 同理, 如果  $\alpha_{2l}$  是  $\mathfrak{R}_2$  里任意純量乘法, 則  $\alpha_{1l} = U\alpha_{2l}U^{-1}$  是  $\mathfrak{R}_1$  里一个純量乘法. 显然  $U^{-1}\alpha_{1l}U = \alpha_{2l}$ . 于是, 映照  $\alpha_{1l} \rightarrow U^{-1}\alpha_{1l}U$  是  $\mathfrak{R}_1$  里純量乘法的环  $\Delta_{1l}$  到  $\mathfrak{R}_2$  里純量乘法的环  $\Delta_{2l}$  上的一个同构. 今令  $\alpha_1^*$  表示  $\Delta_2$  里使

$$(\alpha_1^*)_l = U^{-1}\alpha_{1l}U$$

的元素, 則这样决定的映照  $\mu$  是  $\Delta_1$  到  $\Delta_2$  上的同构. 对于  $\mathfrak{R}_1$  里任意的  $x_1$  及  $\Delta_1$  里任意的  $\alpha_1$ , 我們有

$$(\alpha_1 x_1)U = (x_1 \alpha_{1l})U = (x_1 U)(U^{-1}\alpha_{1l}U) = (x_1 U)(\alpha_1^*)_l,$$

或

$$(17) \quad (\alpha_1 x_1)U = \alpha_1^*(x_1 U).$$

这个方程指出:  $\mathfrak{R}_1$  与  $\mathfrak{R}_2$  有相同的維数. 令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\Delta_1$  上  $\mathfrak{R}_1$  的一个基, 則任意的  $x = \sum \xi_i e_i$ , 这里  $\xi_i \in \Delta_1$ . 于是, 由 (17) 得  $xU = \sum (\xi_i e_i)U = \sum \xi_i^*(e_i U)$ , 而向量  $e_i U$  是  $\mathfrak{R}_2$  的生成元素. 如果在  $e_i U$  之間还有一个关系, 則可把它写成  $\sum \xi_i^*(e_i U) = 0$  的形状; 于是,  $(\sum \xi_i e_i)U = 0$ , 而  $\xi_i$  与  $\xi_i^*$  都是 0, 这就完成了証明.

实际上我們曾証出比要証的更多的結果. 为着述出精确的結果, 我們將使用綫性变换概念的一个重要推广, 今定义它如次: 令  $U$  是  $\Delta_1$  上向量空間  $\mathfrak{R}_1$  到  $\Delta_2$  上向量空間  $\mathfrak{R}_2$  的一个映照, 如果 1)  $U$  是加法羣的一个同态, 及 2) 有  $\Delta_1$  到  $\Delta_2$  上的一个同构  $\mu$  存在使

对于所有  $x \in \mathfrak{R}_1$  及所有  $\alpha \in \Delta_1$ ,

$$(\alpha x)U = \alpha''(xU),$$

則映照  $U$  叫做半綫性變換. 如果  $u'$  是另一个同构使上面的方程成立, 則对于所有  $x$ ,  $(\alpha'' - \alpha'')(xU) = 0$ . 所以, 如果  $U \neq 0$ , 則  $\alpha'' = \alpha'''$ , 并且  $u = u'$ . 所以, 如果  $U \neq 0$ , 則  $u$  可由  $U$  唯一决定; 而在此种情形,  $u$  就叫做  $U$  的相伴同构.

令  $U_1$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  内的一个半綫性變換, 而  $U_2$  是  $\mathfrak{R}_2$  到第三个向量空間  $\mathfrak{R}_3$  内的一个半綫性變換. 令  $u_1$  与  $u_2$  分别是  $U_1$  与  $U_2$  的同构, 則

$$(\alpha x)U_1U_2 = (\alpha^{u_1}(xU_1))U_2 = \alpha^{u_1u_2}(xU_1U_2).$$

于是,  $U_1U_2$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_3$  内的一个半綫性變換, 帶有相伴同构  $u_1u_2$ . 次設  $U_1$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  上的 1—1 半綫性變換, 并令  $U_1^{-1}$  表示它的逆變換, 則由  $(\alpha x)U_1 = \alpha^{u_1}(xU_1)$ , 得  $\alpha x = (\alpha^{u_1}(xU_1))U_1^{-1}$ . 以  $x$  代  $xU_1$ , 以  $\alpha$  代  $\alpha^{u_1}$ , 則这个方程变为  $(\alpha x)U_1^{-1} = \alpha^{u_1^{-1}}(xU_1^{-1})$ . 所以,  $U_1^{-1}$  是帶有同构  $u_1^{-1}$  的半綫性變換.

这些提示指出, 如果  $A_1 \in \mathfrak{L}_1$ , 而  $U$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  上的一个 1—1 半綫性變換, 則  $U^{-1}A_1U \in \mathfrak{L}_2$ . 显然,  $A_1 \rightarrow U^{-1}A_1U$  是  $\mathfrak{L}_1$  到  $\mathfrak{L}_2$  上的一个同构. 这結果自然是較平凡的, 但能确定逆定理的成立, 而这就是方程(16)与(17)指出的事实.

**定理 8.**  $\mathfrak{L}_1$  到  $\mathfrak{L}_2$  上的任意同構  $A_1 \rightarrow A_1\phi$  是由  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  上的一个 1—1 半綫性變換  $U$  給出, 亦即  $A_1\phi = U^{-1}A_1U$ .

由此得下面的系.

**系**  $\mathfrak{L}$  的任意自同構是由  $\mathfrak{R}$  到它自身上的一个 1—1 半綫性變換給出.

### 習 題 66

1. 令  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基, 并令  $U$  是  $\mathfrak{R}$  到它自身内的一个半綫性變換. 如果  $e_iU = \sum \alpha_{ij}e_j$ , 則  $(\alpha)$  是  $U$  (关于給定的基)的陣. 証明:  $U$  是由  $(\alpha)$  及相伴自同构完全决定. 求給出  $U$  关于第二个基的陣的變換公式. 証明: 如果  $(\alpha)$  是一个陣, 而  $u$  是一个自同构, 則对于任意对  $((\alpha), u)$  有一个半綫性變換与它对应, 这个變換关于  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  的陣是  $(\alpha)$ , 而它的自同构是  $u$ .

2. 如果  $U$  是半綫性變換帶有陣  $(\alpha)$  及自同构  $u$ , 寫下  $U \rightarrow ((\alpha), u)$ . 証明: 如果  $U \rightarrow ((\alpha), u)$  及  $V \rightarrow ((\beta), v)$ , 則  $UV \rightarrow ((\alpha)^v(\beta), uv)$ , 这里  $(\alpha)^v \equiv (\alpha_{ij}^v)$ .

3. 証明：一个子空間  $\mathfrak{S}$  在一个半綫性变换  $U$  下的象  $\mathfrak{S}U$  是一个子空間。証明：由变换  $U$  映到 0 的向量的集合  $\mathfrak{Z}$  是一个子空間。証明：維数关系  $\dim \mathfrak{S}U + \dim \mathfrak{Z} = n$ 。

4. 証明：純量乘法是半綫性变换。

5. 令  $\mathfrak{L}$  是域  $\Phi$  上向量空間里綫性变换的环。証明： $\mathfrak{L}$  里使心的元素不变的每个自同构是内自同构，亦即具有形状  $A \rightarrow U^{-1}AU$ ，这里  $U \in \mathfrak{L}$ 。

## 第九章

### 无限維向量空間

到此为止我們专集中注意力于闡述有限維向量空間，虽然有限情形的基本概念确是可用于任意空間，而对于沒有有限基的空間所有这些概念是否都是有效則不是显然的。

本章介紹任意向量空間的研究，这种空間的討論构成較新的研究領域，它的发展在很大程度上是受分析上需要的影响，最主要的应用在使用代数上概念外也使用拓扑上概念，这些应用的出发点是拓扑向量空間的概念，另一方面，我們曾找到关于任意(离散)向量空間的若干有趣結果，而这些就是这里要討論的，拓扑上概念在討論开始时沒有出現，但在考察綫性变换的集合上某些自然拓扑时将要遇到，我們將用这些概念給純粹代数的結果以簡單的講述。

我們要給出的許多結果都是有限情形上結果的直接推广，但有一些本質上差別，最重要的差別是一个向量空間的共軛空間的共軛空間不与原来空間重合，事实上，如果  $\mathfrak{R}$  是无限維向量空間，則  $\dim \mathfrak{R}^* > \dim \mathfrak{R}$ ，而这就阻碍了方程  $\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R}$  的成立。

本章末了部分又提到綫性变换的集合的研究，我們將見到叔尔的基本引理使自同态的不可約集合的理論能化簡为綫性变换的不可約集合的理論，这个引理之外，我們还証明关于綫性变换的不可約集合的一个稠密性定理，它是勃恩賽得(Burnside)的一个古典定理的推广。

目前的考察比起有限情形自然需要更多有力的邏輯工具，其中特別要提到佐恩(Zorn)引理及基数理論，我們假定讀者对于这些概念及拓扑的綱要都已熟悉。



**1. 基的存在** 令  $\mathfrak{R}$  是除环  $\Delta$  上一个任意向量空間。我們知道, 如果  $\mathfrak{R}$  里每个向量都是  $\mathfrak{R}$  的一个子集合  $S$  里向量的(有限)綫性組合, 則  $S$  叫做  $\mathfrak{R}$  的生成元素集合。如果  $S$  的每个有限子集合  $F$  是綫性无关的, 則  $S$  是綫性无关集合。一个綫性无关的子集合  $B$  也是生成元素集合时, 則  $B$  是一个基, 此时每个向量有一个方法而且仅有一个方法写为  $B$  里元素的綫性組合。

今將証明下面两个基本結果: 1) 任意生成元素集合含有  $\mathfrak{R}$  的一个基, 及 2) 元素的任意綫性无关集合可从任意基里补充一些元素而得一个基。这两个結果都要用到下面的佐恩引理:

令  $P$  是一个偏序集合, 它的每个綫性有序子集合有一个上界, 則  $P$  拥有一个極大元素<sup>1)</sup>。

偏序集合的概念在第一章里曾定义过, 它是一个集合, 在这个集合里定义有一个二元关系  $a \leq b$  使: (i)  $a \leq a$ ; (ii) 如果  $a \leq b$  而  $b \leq a$ , 則  $a = b$ ; (iii) 如果  $a \leq b$ , 而  $b \leq c$ , 則  $a \leq c$ 。綫性有序集合(或鏈)是一个偏序集合, 在这个集合里任意两个元素都可比較的, 亦即或是  $a \leq b$ , 或是  $b \leq a$ 。一个偏序集合的子集合  $S$  的上界是一个元素  $u \in P$  能使  $S$  里每个  $s$  有  $s \leq u$ 。如果  $m$  是子集合  $S$  的一个元素, 而  $S$  里沒有元素  $s (\neq m)$  能使  $m \leq s$ , 則  $m$  叫做  $S$  的極大元素。

今來証明上面的命題 1)。令  $S$  是  $\mathfrak{R}$  的一个生成元素集合。令  $P$  是  $S$  的綫性无关子集合的集合。則  $P$  关于包含关系是一个偏序集合。令  $L$  是  $P$  的一个綫性有序子集合, 并且令  $U$  是属于  $L$  的集合的邏輯和, 則可断言  $U$  是綫性无关的。否則  $U$  含有一个綫性相关集合  $u_1, u_2, \dots, u_m$ 。因为,  $u_i \in A_i \in L$ ; 而对于任意  $i, j$  有  $A_i \subseteq A_j$  或  $A_j \subseteq A_i$ 。所以有一个  $A$ , 譬如  $A_m$ , 含所有其它的  $A$ 。于是, 每个  $u_i \in A_m$ , 而  $A_m$  含有一个有限的綫性相关子集合。这与假設  $A_m \in P$  矛盾; 所以,  $U \in P$ 。显然这个元素可用为所有  $A \in L$

1) 这个极大原理似是由霍斯多夫 (Hausdorff) 首先发现。它在代数上的重要是由佐恩首先肯定。这个原理的充分討論見柏克霍夫 (Birkhoff) 著的格論 (Lattice Theory) (第 2 版), 第 42 頁。

的一个上界。至此可使用佐恩引理以推出  $P$  含有一个极大元素；而这就意味着生成元素集合  $S$  含有一个极大线性无关子集合  $B$ 。我们易知  $B$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基。如果  $y$  是  $S$  的任意元素不含于  $B$  里，则集合  $B \cup y$  是一个相关集合。这可推得  $y$  是  $B$  的元素的线性组合<sup>1)</sup>。所以，每个  $s \in S$  是  $B$  的元素的线性组合，故  $B$  是一个生成元素集合；并且因为  $B$  是线性无关集合，故实际上  $B$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基。

2) 的证明与上面类似。此时令  $S$  是线性无关集合，并令  $B$  是一个基。令  $P$  是含有  $S$  而含于  $S \cup B$  里的线性无关集合的集合。则重复上面的论证指出： $P$  含有一个极大元素  $C$ ，故易知  $C$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基。

**2. 维数的不变性** 其次要证  $\mathfrak{R}$  的任意两个基的基数相等。

令  $B$  与  $C$  是  $\mathfrak{R}$  的两个基。我们把  $B$  的元素用下标  $i$  注出，这里  $i$  属于一个集合  $I$ ；又把  $C$  的元素用下标  $k$  注出，这里  $k$  属于一个集合  $K$ 。如果这两个基中有一个譬如  $B$  (或  $I$ ) 是有限的，则  $\mathfrak{R}$  有一个有限基。于是知  $C$  也是有限的，而且它的基数与  $B$  的基数相同<sup>2)</sup>。故只要考虑  $B$  与  $C$  都是无限情形就够了。这里可使用下面的洛尉(Löwig)的论证。用  $C$  的  $f_k$  把  $B$  的每个  $e_i$  写出如

$$e_i = \beta_1 f_{k_1} + \beta_2 f_{k_2} + \cdots + \beta_m f_{k_m},$$

这里  $\beta_l \neq 0$ 。每个  $f_k$  必定出现于某个这样的式子里；这因为，如果有一个特殊的  $f_k$  不出现，则由于这个  $f_k$  是  $e$  的一个线性组合，而每个  $e$  是  $f$  ( $\neq f_k$ ) 的线性组合，所以  $f_k$  是  $f$  ( $\neq f_k$ ) 的线性组合。这与  $f$  的线性无关性矛盾。

今定义集合  $C$  到集合  $B$  内的一个单值映照  $\phi$ 。令  $f_k \in C$ ，并且令  $e_i \equiv \phi(f_k)$  是  $B$  里表达式含有  $f_k$  的这些  $e$  中的一个  $e$ 。故得整个  $C$  到  $B$  内的一个单值映照。令  $B' = \phi(C)$  是象集合。如果  $e_{i'} \in B'$ ，则逆象  $\phi^{-1}(e_{i'})$  由出现于  $e_{i'}$  的表达式里的  $f_k$  构成。故  $\phi^{-1}(e_{i'})$  是一个有限集合。于是集合  $B'$  与逆象  $\phi^{-1}(e_{i'})$  的集合  $I'$

1) 参看第一章，§4 的引理1。

2) 参看第一章，定理2及3。

之間有一个 1—1 对应。集合  $\Gamma$  给出集合  $C$  分解为非相交的有限集合的一个分解。而且因为  $C$  是无限的,故  $\Gamma$  也是无限的。于是,由基数理论里的标准定理易知  $C$  与  $\Gamma$  有相同基数<sup>1)</sup>。所以  $B'$  的基数与  $C$  的基数相同;因此  $B$  的基数大于或等于  $C$  的基数。如果把  $B$  与  $C$  的地位对调,则知  $B$  的基数不能超过  $C$  的基数。故由伯恩斯坦 (Bernstein) 定理知,这两个集合有相同的基数。

与有限情形一样,任意基的基数叫做  $\Delta$  上  $\mathfrak{K}$  的维数。也与有限情形一样,我们可以任意给定的基数为维数在任意给定的  $\Delta$  上作一个向量空间。为着这个目的,令  $I$  是具有给定基数的一个集合。令  $\mathfrak{K}$  是定义在  $I$  上的这样函数的集合,它们的值  $x(i) \in \Delta$ , 并且除了有限个的  $i \in I$  外,对于其他所有  $i$  都使  $x(i) = 0$ 。由坐标的加法来定义两个这样函数的和,并由  $\Delta$  的给定元素左乘坐标来定义纯量积。这两个合成产生  $\mathfrak{K}$  里的结果,并且显然满足向量空间的公理。今决定  $\mathfrak{K}$  的一个特殊基。对于每个  $i \in I$ , 定义  $e_i$  为使

$$(1) \quad e_i(j) = \delta_{ij}$$

的向量。我们易知这些向量是线性无关的。如果  $x$  是任意向量,令  $i_1, i_2, \dots, i_m$  是使  $x(i) \neq 0$  的那些  $i$ 。如果  $x(i_j) = \xi_j$ , 则显然  $x = \xi_1 e_{i_1} + \xi_2 e_{i_2} + \dots + \xi_m e_{i_m}$ 。所以  $e_i$  构成一个基。因为  $i \rightarrow e_i$  是一个 1—1 对应,这个基与  $I$  有相同的基数。

还要指出,有相同维数的任意两个向量空间与有限情形一样是等价的。特别是任意向量空间与上面作出的那个类型的函数空间是等价的。

**3. 子空间** 第一章里讲的有限维向量空间的子空间格的所有性质在无限情形几乎都成立。关于链条件必须除外,事实上这些条件中没有一个对于带有无限基的向量空间能够成立。

前面考察里,只在证明一个子空间的余空间的存在性时用到基。现在可用性质 2) 来引出用于证明这个结果的论点。令  $\Theta$  是

1) 例如,参考西尔平斯基 (Sierpinski) 著的超限数教程 (Leçons sur les Nombres Transfinis), 1928 年在巴黎出版。

$\mathfrak{R}$  的一个子空間, 則知  $\mathfrak{S}$  有一个基  $S$ . 因为  $S$  是一个綫性无关集合, 故可嵌入  $\mathfrak{R}$  的一个基  $B$  里. 我們記  $B = S \cup T$ , 这里  $S \cap T$  是空集合, 并令  $\mathfrak{S}'$  是由  $T$  里向量生成的空間, 則立得  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}'$ , 而  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}' = 0$ . 所以,  $\mathfrak{S}'$  是  $\mathfrak{S}$  的一个余空間.

这里使用的論証也可用于証明  $\mathfrak{R}$  的任意子空間的特殊类型的基的存在, 其結果是下面的定理.

**定理 1.** 令  $\mathfrak{R}$  有一个基  $B = (e_i)$ . 如果  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  的任意子空間, 則可把  $B$  分为两个非相交子集合  $C = (e_i)$ ,  $D = (e_k)$ , 使  $\mathfrak{S}$  有形狀如  $f_i = e_i + u_i$  的一个基, 这里  $u_i$  是属于由  $D$  生成的空間, 而  $f_i \rightarrow e_i$  是  $\mathfrak{S}$  的基  $(f_i)$  到  $C$  上的一个 1—1 映照.

**証** 这里存在有由  $B$  的一个子集合  $D = (e_k)$  生成的  $\mathfrak{S}$  的余空間  $\mathfrak{S}'$ . 令  $C = (e_i)$  是  $B$  里  $D$  的余集合, 則每个  $e_i = f_i - u_i$ , 这里  $f_i \in \mathfrak{S}$ , 而  $u_i \in \mathfrak{S}'$ , 并且即将証明  $(f_i)$  是  $\mathfrak{S}$  的一个基. 集合  $(f_i)$  是綫性无关的; 这因为, 令  $\sum \beta_i f_i = 0$ , 則  $\sum \beta_i e_i + \sum \beta_i u_i = 0$ , 于是由  $e_i$  的綫性无关性知每个  $\beta_i = 0$ . 集合  $(f_i)$  生成  $\mathfrak{S}$ ; 这因为, 如果  $y \in \mathfrak{S}$ , 則  $y = \sum \beta_i e_i + \sum \gamma_k e_k = \sum \beta_i f_i - \sum \beta_i u_i + \sum \gamma_k e_k$ . 于是,  $y - \sum \beta_i f_i \in \mathfrak{S}'$ ; 从而  $y - \sum \beta_i f_i = 0$ . 最后說到: 如果  $e_i$  及  $e_{i'}$  是  $C$  里不同的元素, 則  $f_i \neq f_{i'}$ . 否則,  $e_i - e_{i'} \in \mathfrak{S}'$ , 这与  $B$  是一个基矛盾. 故知映照  $e_i \rightarrow f_i$  是 1—1 的, 而这就結束了証明.

定理 1 是諾德(Noether)发现的. 所以这种类型的一个基可叫做子空間  $\mathfrak{S}$  关于  $\mathfrak{R}$  的基  $B$  的諾德基.

**4. 綫性变换及陣** 有限維向量空間的綫性变换与有限陣之間的联系可直接轉移于无限情形.

令  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{S}$  是  $\Delta$  上向量空間, 并令  $B = (e_i)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基. 首先要說,  $B$  到  $\mathfrak{S}$  內的任意映照  $e_i \rightarrow y_i$  可有一个方法而且只有一个方法扩张为  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{S}$  內的一个綫性变换. 容易驗證: 这个扩张把

$$\sum_1^m \xi_i e_{ij} \text{ 映到 } \sum_1^m \xi_i y_{ij}^{(1)}.$$

次令  $C = (f_k)$  是  $\mathfrak{S}$  的一个基, 并把  $e_i$

1) 这建立了  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{S}$  內的非当然的綫性变换的存在. 要这样做似乎不可能不用到基.

关于綫性变换  $A$  的象写为

$$(2) \quad e_i A = y_i = \sum \alpha_{ik} f_k,$$

这里和是有限項的。因此陣  $(\alpha_{ik})$  是行有限的，亦即对于一个固定的  $i$ ，只有有限个  $k$  使  $\alpha_{ik} \neq 0$ 。一般地说，如果  $I$  及  $J$  是任意两个集合，則积集合  $I \times J$  到  $\Delta$  内的一个函数叫做一个  $\Delta$  上  $I \times J$  陣。于是，我們建立了  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{S}$  内的綫性变换与  $\Delta$  上行有限的  $I \times J$  陣之間的一个对应。这个对应当然与基的选取有关。在  $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$  的特殊情形，自然取  $C$  与基  $B$  相同。于是得一个  $I \times I$  “方”陣为  $A$  关于基  $B$  的陣。

也与有限情形一样，我們容易验证：由 (2) 所决定的对应  $A \rightarrow (\alpha)$  是綫性变换的集合  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  到行有限的  $I \times J$  陣的集合上的 1—1 映照。与两个变换的和对应的陣可由把两个陣的各个对应分量  $\alpha_{ik}$  与  $\beta_{ik}$  相加而得。故行有限的陣关于这个运算成一个羣。

如果  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ ，而  $A$  的陣由单一的基决定，則可見陣  $AB$  的元素  $\gamma_{il}$  是

$$(3) \quad \gamma_{il} = \sum_k \alpha_{ik} \beta_{kl},$$

这里  $A \rightarrow (\alpha)$  而  $B \rightarrow (\beta)$ 。(3) 里的和是有限項的，而积陣  $(\gamma) = (\alpha)(\beta)$  是行有限的。故  $I \times I$  行有限的陣的集合  $\Delta_I$  带着上述的加法及乘法是一个环，与环  $\mathfrak{L}$  同构。

基的改变也可象有限情形一样討論。如果有  $\mathfrak{R}$  的另一个基，則可設已經把它安排使与同一个下标集合  $I$  成 1—1 对应。如果用  $f_i$  表这个基里的向量，則可写下

$$(4) \quad f_k = \sum \mu_{ki} e_i, \quad e_i = \sum v_{ik} f_k,$$

这里  $(\mu)$  及  $(v)$  都是行有限的  $I \times I$  陣。易知  $(\mu)(v) = 1 = (v)(\mu)$ ，这里  $1$  是元素为  $\delta_{ik}$  的陣。故  $(\mu)$  是  $\Delta_I$  里一个单位，亦即它有一个双侧逆陣  $(v) = (\mu)^{-1}$ 。反过来，如果  $(\mu)$  是任意单位，則由 (4) 里第一个方程組所定义的  $f_k$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基。

如果  $A$  是一个綫性变换，它关于基  $(e_i)$  的陣是  $(\alpha)$ ，則可直接验证： $A$  关于  $(f_i)$  的陣是  $(\mu)(\alpha)(\mu)^{-1}$ 。

**5. 共軛空間的維數** 如果  $\mathfrak{R}$  是一個有限維向量空間, 則知  $\mathfrak{R}$  上綫性函數的右向量空間  $\mathfrak{R}^*$  與  $\mathfrak{R}$  有相同的維數. 有限與無限的理論間的基本差別是: 當  $\mathfrak{R}$  為無限維時這個結果不再成立. 在無限情形我們將證  $\dim \mathfrak{R}^* > \dim \mathfrak{R}$ . 更確定地說, 我們將證: 如果  $\Delta$  的基數是  $d$ , 而  $\mathfrak{R}$  的維數是  $b$ , 則  $\mathfrak{R}^*$  的維數是  $d^b$ , 它是基數  $b$  的一個集合到基數  $d$  的一個集合的映照的集合的基數. 今先證下面的引理.

**引理 1.** 如果  $\dim \mathfrak{R} = b$  是無限的, 而  $\Delta$  的基數是  $d$ , 則  $\mathfrak{R}$  的基數是  $db$ .

證 如果  $(e_i)$  是  $\mathfrak{R}$  的一個基, 則  $\mathfrak{R}$  里每個非零向量  $x$  有唯一的表示如

$$x = \sum_{j=1}^N \xi_{ij} e_{ij}, \quad \xi_{ij} \neq 0.$$

故每個  $x \neq 0$  可與一個唯一決定的子集合  $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_N}$  相伴, 並且與一個唯一的  $N$ -維組  $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_N})$  相伴, 這裡各個分量屬於  $\Delta$ , 且  $\neq 0$ . 因為  $(e_i)$  是無限的, 所以由含有  $(e_i)$  的  $N$  個元素的子集合構成的集合的基數等於  $b^N$ . 另一方面,  $N$ -維組  $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_N})$  的集合的基數或是  $d (= d^N)$ , 或是有限的. 不論那一種情形, 由集合  $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_N}$  及  $N$ -維組  $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_N})$  構成的集合的基數是  $db$ . 所以,  $\mathfrak{R}$  的基數是  $db + db + \dots$ ; 故它只是  $db$ .

$\mathfrak{R}$  上任意綫性函數由它對於  $\mathfrak{R}$  的基  $(e_i)$  的值所決定; 並且有一個綫性函數存在使  $f(e_i)$  是  $\Delta$  的任意元素. 故  $\mathfrak{R}^*$  與  $(e_i)$  到  $\Delta$  內的映照集合之間有一個 1—1 對應. 所以  $\mathfrak{R}^*$  的基數是  $d^b$ . 另一方面, 如果  $b^* = \dim \mathfrak{R}^*$ , 則引理 1 指出  $\mathfrak{R}^*$  的基數是  $db^*$ . 所以  $db^* = d^b$ . 因為  $db^*$  是  $d$  與  $b^*$  中較大的那一個, 如果能證得  $b^* \geq d$ , 則可導出  $b^* = d^b$ . 因為  $b^*$  顯然是無限的, 如果  $d \leq$  阿列夫零, 則關係  $b^* \geq d$  成立. 所以從現在起假定  $d >$  阿列夫零.

1) 這可由著名的結果  $b^N = b$  導出. 參看西爾平斯基著超無限數教程, 第 217 頁, (c. Nombres Transfinis<sup>2)</sup>), 第 217 頁.

要在这个情形下建立所需要的不等式,我們考虑可数序列 $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ 的集合,这里 $\gamma_i \in \Delta$ . 如果由这样序列的一个集合 $F$ 里选取的每个有限方阵是满秩的,則这个集合 $F$ 叫做强无关的. 我們从 $F$ 选一个有限方阵是由先挑取有限个序列

$(\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \dots), (\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}, \dots), \dots, (\gamma_1^{(n)}, \gamma_2^{(n)}, \dots),$   
然后取下标的一个集合 $i_1, i_2, \dots, i_n$ , 即得陣

$$\begin{bmatrix} \gamma_{i_1}^{(1)} & \gamma_{i_2}^{(1)} & \cdots & \gamma_{i_n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{i_1}^{(n)} & \gamma_{i_2}^{(n)} & \cdots & \gamma_{i_n}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

今証下面的引理.

**引理 2.** 存在有序列的一个强无关集合,它的基数 $\geq d^{\aleph_1}$ .

**証** 我們由包含关系把强无关集合 $F$ 編成偏序. 如果这些集合的一組 $\{F\}$ 是綫性有序的,显然 $\cup F$ 是强无关的. 由佐恩引理知:有一个极大强无关集合 $M$ 存在. 今用归納法証明:如果 $M$ 的基数小于 $d$ ,則可作一个序列 $X \notin M$ 使 $M \cup \{X\}$ 是强无关的,这与 $M$ 的极大性矛盾. 設已找到 $X$ 的为首 $p$ 个元素 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ 使由 $M \cup (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ 选出的每个 $q \times q$ 陣是满秩的,这里 $q \leq p$ . 我們將决定 $\xi_{p+1}$ 使由 $M \cup (\xi_1, \dots, \xi_{p+1})$ 选出的每个 $r \times r$ 陣是滿秩的,这里 $r \leq p+1$ . 这个施于 $\xi_{p+1}$ 上的要求的条件是,每个下面形状的陣是滿秩陣:

$$(5) \quad \begin{bmatrix} & & & * \\ & & & \vdots \\ & A & & \vdots \\ & & & * \\ \xi_{i_1} \xi_{i_2} & \cdots & \xi_{i_{r-1}} \xi_{p+1} \end{bmatrix},$$

这里 $A$ 是由 $M$ 决定的一个 $(r-1) \times (r-1)$ 陣. 因为对于形状(5)的每个陣把 $\xi_{p+1}$ 看作一个不定量时,在 $\Delta$ 里 $\xi_{p+1}$ 的选取只有一个值使(5)为降秩陣. 由于 $A$ 是滿秩陣,所以它的行向量是左

1) 这个引理是卡浦兰斯基通知作者的;由卡浦兰斯基与儿尔朵斯(P. Erdos)合作証明.

綫性无关的。故行向量  $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{r-1}})$  可有一个方法而且只有一个方法写为  $A$  的各行的綫性組合。如果  $\mu$  表示 (5) 的末列的元素的同样綫性組合, 則在  $\xi_{p+1} \neq \mu$  时, (5) 是滿秩的。其次注意到陣 (5) (在 (5) 里  $\xi_{p+1}$  是一个不定量) 的集合的基数小于  $d$ 。由假設,  $M$  的基数小于  $d$ ; 而我們所考虑的陣的集合的基数是由  $M$  挑选的  $r-1$  个序列的集合的基数与在整数  $1, 2, \dots, p$  里选取的  $r-1$  个元素的基数的积。結果或是有限的, 或是  $M$  的基数。在任一种情形下, 它是小于  $d$ 。因为  $\Delta$  的基数是  $d$ , 我們可选一个  $\xi_{p+1}$  使所有的陣 (5) 是滿秩陣。这就完成了用归納法証明使  $M \cup \{X\}$  是强无关的  $X$  的存在。故与  $M$  的极大性矛盾, 而引理就給証明了, 今可証主要結果。

**定理 2.** 如果  $\mathfrak{R}$  是一个无限維  $b$  的向量空間, 而除环  $\Delta$  的基数是  $d$ , 則  $\mathfrak{R}^*$  的維數  $b^*$  是  $d^b$ 。

証 我們已知只要証明  $b^* \geq d$  就够了, 并且我們可假定  $d >$  阿列夫零。令  $(e_i)$  是  $\mathfrak{R}$  的一个基, 并在  $(e_i)$  里选取一个可数的集合  $(e_j)$ 。令  $M$  是可数序列的一个强无关集合。对于每个  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in M$ , 我們可定义一个綫性函数  $f$  使  $f(e_j) = \gamma_j$ 。这样由  $M$  的元素得出的綫性函数的集合是一个綫性无关集合。它的基数与  $M$  的基数相同。所以由引理 2 可設它是  $\geq d$ 。这証明  $\mathfrak{R}^*$  里至少存在有  $d$  个綫性无关元素; 所以得  $b^* \geq d$ , 而  $b^* = d^b$ 。

关系  $b^* = d^b$  自然可推得  $b^* > b$ 。如果  $b^{**} \equiv \dim \mathfrak{R}^{**}$ , 則还有  $b^{**} > b^* > b$ 。这个結果指出  $\mathfrak{R}$  不能与  $\mathfrak{R}^*$  上綫性函数的空間恆等。

## 習 題 67

1. (马基). 令  $\mathfrak{R}$  是域  $\Phi$  上一个向量空間, 証明: 序列  $\xi_r = (r, r^2, r^3, \dots)$  的集合是綫性无关的, 这里  $r \neq 0, r \in \Phi$ 。

(注: 这导致定理 2 对于可交換情形的一个初等証明。)

**6. 綫性变換的有限拓扑** 今将介紹向量空間  $\mathfrak{R}$  到向量空間  $\mathfrak{S}$  的綫性变換的集合  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  里某种拓扑。我們的拓扑是平凡的 (亦即离散的) 拓扑必須而且只須  $\mathfrak{R}$  是有限維的。于是, 这給出有



限与无限理論之間的另一个重要的差异点.

我們知道, 一个拓扑空間是由一个集合  $E$  及  $E$  的子集合的集合(叫做开集合)构成, 使

1. 开集合的任意集合的邏輯和是开集合.
2. 任意有限个开集合的交是开集合.
3. 集合  $E$  与空集合都是开集合<sup>1)</sup>.

令  $\mathfrak{B}$  是开集合的集合里一个子集合, 如果每个开集合是  $\mathfrak{B}$  的元素的一个邏輯和, 則  $\mathfrak{B}$  叫做一个基. 如果  $\mathfrak{B}$  是一个基, 則  $\mathfrak{B}$  的任意两个元素的交是  $\mathfrak{B}$  的元素的邏輯和. 反过来, 如果  $E$  是任意集合, 而  $\mathfrak{B}$  是它的子集合的集合能使它們的邏輯和是  $E$ , 并且  $\mathfrak{B}$  的任意两个元素的交是  $\mathfrak{B}$  的元素的一个邏輯和, 則可說  $\mathfrak{B}$  的元素的邏輯和为开集合. 結果的集合适合 1—3; 所以它与集合  $E$  定义一个拓扑空間. 如果給出一个集合  $E$  的子集合的集合, 适合上面各条件, 則說  $E$  拓扑化. 开集合的集合叫做  $E$  的一个拓扑.

今考虑集合  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ . 如果  $x_1, x_2, \dots, x_m$  与  $y_1, y_2, \dots, y_m$  分別是  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{S}$  的有限子集合, 則定义  $O(x_i; y_i)$  是  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{S}$  内所有能使  $x_i A = y_i (i = 1, 2, \dots, m)$  的綫性映照  $A$  的集合. 任意两个  $O(x_i; y_i)$  的交显然是另一个  $O(x_i; y_i)$ . 所以这个集合可用为  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  里一个拓扑的一个基. 这个拓扑叫做  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  的有限拓扑. 今讲述: 任意开集合  $O(x_i; y_i)$  或是空集合或是与一个开集合  $O(x_j; y_j)$  相重合, 这里  $x_j$  是綫性无关的. 这因为, 設  $x_1, x_2, \dots, x_r$  是  $x_1, x_2, \dots, x_m$  的一个极大綫性无关子集合, 并令  $x_k = \sum_{j=1}^r \beta_{kj} x_j$  对于  $k = r+1, \dots, m$  成立, 則除非  $y_k = \sum \beta_{kj} y_j$ ,  $O(x_i; y_i)$  必定是空集合. 另一方面, 如果条件能成立, 則  $O(x_i; y_i) = O(x_j; y_j) (j = 1, 2, \dots, r)$ . 这个說明指出,  $x_j$  是綫性无关时,  $O(x_j; y_j)$  构成我們的拓扑的一个基.

至此可見, (有有限拓扑的)拓扑空間  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  是离散的, 亦即

1) 在討論里我們使用勒夫謝茲 (Lefschetz) 著的代数拓扑学 (Algebraic Topology), 第一章里的術語.

說每个子集合是开集合,必須而且只須 $\mathfrak{R}$ 是有限維的。这因为,先令 $\mathfrak{R}$ 有有限基 $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 并令 $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ , 則 $O(e_i; e_i A) = (A)$ , 而 $A$ 是一个开集合。故由1知 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 的每个子集合是开集合。次令 $\dim \mathfrak{R}$ 是无限的; 如果 $x_1, x_2, \dots, x_r$ 是一个綫性无关集合, 則 $O(x_i; y_i)$ 是一个非可数集合。这因为, 我們可补充 $x_i$ 成一个基, 并且有一个基的元素映到 $\mathfrak{S}$ 的任意元素的一个綫性变换存在。于是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 的每个开集合是非可数的; 因此拓扑不是离散的。

其次要証: $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 是一个拓扑羣, 亦即 $A - B$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 里两个变数 $A, B$ 的一个連續函数。最后, 如果 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$ , 因而 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ 是一个环, 則 $\mathfrak{L}$ 是一个拓扑环, 亦即具有 $A - B$ 的連續性之外, 还具有乘法合成的連續性。令 $A$ 与 $B$ 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ 的固定元素, 并令 $O(x_i; y_i)$ 是含有 $A - B$ 的基的一个元素。这样一个集合叫做点的邻域。因为 $A - B \in O(x_i; y_i)$ , 故可写 $y_i = x_i(A - B)$ , 因而 $O(x_i; y_i) = O(x_i; x_i(A - B))$ 。但 $O(x_i; x_i A)$ 及 $O(x_i; x_i B)$ 分別是 $A$ 及 $B$ 的邻域, 并且显然如果 $X \in O(x_i; x_i A)$ 而 $Y \in O(x_i; x_i B)$ , 則 $X - Y \in O(x_i; x_i(A - B))$ 。这証明了差合成是連續的。

次令 $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$ , 并令 $O(x_i; x_i AB)$ 是 $AB$ 的任意邻域。則 $O(x_i; x_i A)$ 及 $O(x_i A; x_i AB)$ 分別是 $A$ 及 $B$ 的邻域。所以, 如果 $X \in O(x_i; x_i A)$ 而 $Y \in O(x_i A; x_i AB)$ , 則 $XY \in O(x_i; x_i AB)$ 。故乘法是一个連續合成。

我們知道, 如果一个拓扑空間 $E$ 的一个子集合的余集合是开集合, 則这个子集合叫做閉集合。閉集合适合与1—3对偶的条件。特别是, 任意个閉集合的交是閉集合, 含有 $E$ 的一个子集合 $S$ 的所有閉集合的交叫做 $S$ 的閉包, 記作 $\text{Cl } S$ ; 則知 $E$ 的任意子集合 $S$ 有一个閉包(因为 $E$ 自身是閉集合, 故含有 $S$ 的閉集合存在)。  $S$ 的閉包也可定义为点 $p$  ( $E$ 的元素)的全体, 这里 $p$ 适合下面的性質:  $p$ 的每个邻域与 $S$ 有非空的交。今用下面的例說明綫性变换的有限拓扑里这些概念。

**例** 令  $\mathfrak{R}$  是带有一个可数基  $(e_i)$  的无限域  $\Phi$  上一个向量空间. 令  $(\alpha_i)$  是  $\Phi$  里不同元素的一个可数集合, 并令  $A$  是使  $e_i A = \alpha_i e_i$  的线性变换. 今欲决定含  $A$  的多项式的集合  $\text{Cl } \Phi[A]$  的闭包  $\text{Cl } \Phi[A]$ . 首先看到: 集合  $O^{(r)}(B) = O(e_j; e_j B) (j = 1, 2, \dots, r; r = 1, 2, \dots)$  构成点  $B$  的邻域的完全集合; 亦即, 含  $B$  的任意开集合必含有这些集合中的一个. 令  $O(x_k; x_k B)$  是  $B$  的一个邻域, 这里  $x_k$  是线性无关的, 则存在有一个  $r$  使给定的  $x_k \in [e_1, e_2, \dots, e_r]$ . 故  $O^{(r)}(B) \subseteq O(x_k; x_k B)$ , 而这就证明了上面的论断. 至此显然知, 一个元素  $B$  是在集合  $M$  的闭包里必须而且只须每个集合  $O(e_j; e_j B)$  与  $M$  相交. 今令  $B \in \text{Cl } \Phi[A]$ . 如果  $\phi(\lambda)$  是一个多项式, 则  $e_j \phi(A) = \phi(\alpha_j) e_j$ . 所以, 如果  $\phi(A) \in O^{(r)}(B)$ , 则  $e_j B = e_j \phi(A) = \phi(\alpha_j) e_j (j = 1, 2, \dots, r)$ . 这指出:  $B$  是一个对角线性变换, 亦即  $e_i B = \beta_i e_i (i = 1, 2, \dots)$ . 我们要证:  $\text{Cl } \Phi[A]$  与对角线性变换的集合全同. 这因为, 令  $B$  是任意对角线性变换, 并令  $r$  是任意整数, 考虑由  $B$  及由多项式  $\phi(A)$  在  $[e_1, e_2, \dots, e_r]$  里的诱导变换. 因为  $\alpha_i$  是不同的, 故易知  $\phi(A)$  在这个子空间里诱导出每个对角变换. 于是, 存在有一个  $\phi(A)$  使  $e_j B = e_j \phi(A) (j = 1, 2, \dots, r)$  成立. 这证明了  $B \in \text{Cl } \Phi[A]$ . 故  $\text{Cl } \Phi[A]$  是对角变换的集合.

## 習 題 68

1. 令  $\mathfrak{R}$  是带有一个可数基  $(e_i)$  的域上向量空间, 决定  $\text{Cl } \Phi[A]$ , 这里 (a)  $e_i A = e_{i+1} (i = 1, 2, \dots)$ , 及 (b)  $e_1 A = 0, e_{i+1} A = e_i (i = 1, 2, \dots)$ .
2. 证明: 基本开集合  $O(x_i; y_i)$  也是闭集合 (这可推得:  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{C})$  是一个全不连通空间, 亦即  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{C})$  的连通子集合只是点).
3. 证明: 域上向量空间里线性变换的每个有限维子空间在有限拓扑里是闭空间.

**7.  $\mathfrak{R}^*$  的全子空间** 考虑线性函数  $f$  所成的  $\mathfrak{R}^*$  的子集合  $\mathfrak{R}_0^*$ , 这里  $f$  关于基  $(e_i)$  的阵是列有限的, 亦即只有有限个  $i$  使  $f(e_i) \neq 0$ . 显然线性函数的这个集合构成共轭空间的一个子空间. 对于每个  $i$  我们用条件

$$(6) \quad e_i^*(e_k) = \delta_{ik}$$

定义一个线性函数  $e_i^*$ . 故  $e_i^*$  是线性函数, 它关于基  $(e_i)$  的阵有 1 在第  $i$  位置而其它位置都是 0. 显然  $e_i^*$  构成  $\mathfrak{R}_0^*$  的一个基. 于是,  $\dim \mathfrak{R}_0^* = \dim \mathfrak{R}$ . 至此知道,  $\mathfrak{R}_0^*$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空间; 亦即如果  $u$  是  $\mathfrak{R}$  内任意非零向量, 则有一个元素  $f \in \mathfrak{R}_0^*$  存在使  $f(u) \neq 0$ . 写下  $u = \beta_1 e_{i_1} + \beta_2 e_{i_2} + \dots + \beta_m e_{i_m}$ , 这里  $\beta_1 \neq 0$ , 则  $e_{i_1}^*(u) = \beta_1 \neq 0$  即为所求.

如果一个拓扑空间的一个子集合  $S$  的闭包  $\text{Cl } S$  是整个空间, 则说  $S$  (在空间里) 是稠密的. 今将证:  $\mathfrak{R}^*$  的一个子空间  $\mathfrak{R}'$  在  $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \Delta)$  的有限拓扑里是稠密的必须而且只须  $\mathfrak{R}'$  是全子空

問。首先显然知，如果  $\mathfrak{R}'$  在  $\mathfrak{R}^*$  里是稠密的，則  $\mathfrak{R}'$  是全子空間；否則  $\mathfrak{R}$  里有一个非零向量  $u$  存在，使得对于  $\mathfrak{R}'$  里所有  $g$  有  $g(u) = 0$ 。于是，对于  $\text{Cl } \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^*$  里所有  $f$ ， $f(u) = 0$ 。另一方面，我們可用  $u$  作为一个基里的向量，并且就显見有使  $f(u) \neq 0$  的一个綫性函数  $f$  存在。

要証逆定理，我們使用下面关于  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  的一个子集合的稠密性的判断准則： $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  的一个子集合  $\mathfrak{A}$  在有限拓扑里是稠密的必須而且只須对于  $\mathfrak{R}$  里綫性无关向量的每个有序集合  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  及  $\mathfrak{S}$  里的每个有序集合  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ ，有一个  $A \in \mathfrak{A}$  存在使  $x_i A = y_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 。这个判断准則的充分性显然可由下面的事实得出：集合  $O(x_i; x_i B)$  构成  $B$  的邻域的一个基，必要性則由下面的事实得出：綫性变换的完全集合具有判断准則所述的性質，如果  $\mathfrak{R}'$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个子空間，則可把判断准則进一步化簡，而証明：如果对于  $\mathfrak{R}$  里向量的任意綫性无关的有限集合  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ，存在有  $\mathfrak{R}'$  里向量  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$  的一个余集合，使

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$

則  $\mathfrak{R}'$  是稠密的。这因为，如果是这种情形，而  $\beta_i (i = 1, 2, \dots, m)$  是  $\Delta$  的任意元素，則函数  $f = \sum x_i^* \beta_i \in \mathfrak{R}'$  而  $f(x_i) = \beta_i$ 。故由前面的判断准則知  $\mathfrak{R}'$  是稠密的。今証下面的引理。

**引理** 如果  $\mathfrak{R}'$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空間，而  $x_1, x_2, \dots, x_m$  是  $\mathfrak{R}$  里任意綫性无关向量，則  $\mathfrak{R}'$  含有与  $x_i$  相余的向量  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$  的集合。

**証** 如果  $m = 1$  則是显然的；这因为，此时可在  $\mathfrak{R}'$  里找到一个  $f$  使  $f(x_1) = \beta_1 \neq 0$ 。于是， $x_1^* = f\beta_1^{-1}$  适合  $x_1^*(x_1) = 1$ 。今假定这个結果在  $m - 1$  个向量是成立的；則对于  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$  可在  $\mathfrak{R}'$  里找到  $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}$  使  $f_k(x_l) = \delta_{kl} (k, l = 1, 2, \dots, m - 1)$  成立，对于任意  $f \in \mathfrak{R}'$  定义

$$g(x) = f(x) - \sum_1^{m-1} f_k(x)f(x_k).$$

則  $g \in \mathfrak{R}'$ ，而  $g(x_l) = 0 (l = 1, 2, \dots, m - 1)$ ， $\mathfrak{R}'$  里还存在一

个  $f$  使对应的  $g$  具有性质  $g(x_m) \neq 0$ , 否则对于  $\mathfrak{R}'$  里所有  $f$  得

$$\begin{aligned} 0 = g(x_m) &= f(x_m) - \sum_1^{m-1} f_k(x_m) f(x_k) \\ &= f\left(x_m - \sum_1^{m-1} f_k(x_m) x_k\right). \end{aligned}$$

这可推得  $x_m = \sum_1^{m-1} f_k(x_m) x_k$ , 而与  $x$  的线性无关性矛盾. 今选取

$f$  使  $g(x_m) = \gamma \neq 0$ , 并且定义

$$x_m^*(x) = g(x) \gamma^{-1},$$

$$x_k^*(x) = f_k(x) - x_m^*(x) f_k(x_m) \quad (k = 1, 2, \dots, m-1),$$

则可验证  $x_j^*$  与  $x_j$  相余.

这个引理完成下面定理的证明:

**定理 3.**  $\mathfrak{R}^*$  的一个子空间  $\mathfrak{R}'$  是全子空间的充要条件是:  $\mathfrak{R}'$  在有限拓扑里是稠密的.

如果  $\mathfrak{R}$  是有限维的, 则  $\mathfrak{R}^*$  里有限拓扑是离散的. 故对于  $\mathfrak{R}^*$  的每个子空间  $\mathfrak{R}'$  的闭包  $\text{Cl } \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'$ . 故  $\mathfrak{R}^*$  的全子空间只有  $\mathfrak{R}^*$  自身. 另一方面, 由本节开始时给出的例子指出: 对于无限维空间  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{R}^*$  含有真全子空间.

### 习 题 69

1. 令  $\mathfrak{R}$  有一个可数基, 并令  $\mathfrak{R}'$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空间. 证明: 有  $\mathfrak{R}$  的一个基  $(u_i)$  存在, 它在  $\mathfrak{R}'$  里向量  $(u_i^*)$  的一个余集合, 亦即  $u_i^*(u_j) = \delta_{ij} (j, i = 1, 2, \dots)$  成立.

2. (马基). 令  $\mathfrak{R}$  有一个可数基, 并令  $\mathfrak{R}'$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空间, 且  $\mathfrak{R}'$  有一个可数基. 证明:  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{R}'$  有相余基.

3. 令  $\mathfrak{R}$  有一个可数基, 并令  $\mathfrak{R}'$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空间且有一个可数基, 令  $(e_i)$ ,  $(e_i^*)$  是余基. 证明: 基  $(f_i)$  在  $\mathfrak{R}'$  里没有余集合, 这里  $f_1 = e_1$ , 而在  $i > 1$  时  $f_i = e_i + e_{i-1}$ .

**8. 对偶空间. 克伦内克积** 令  $\mathfrak{R}'$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空间, 并令  $x \in \mathfrak{R}$ . 则映照  $f \rightarrow x(f) \equiv f(x)$  是  $\mathfrak{R}'$  上一个线性函数, 亦即它是  $\mathfrak{R}'$  的共轭空间  $\mathfrak{R}'^*$  的一个元素. 映照  $x \rightarrow x(f)$  是  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{R}'^*$  内的一个线性变换, 并且因为  $\mathfrak{R}'$  是全子空间, 故这个线性变换是 1—1 的. 又因象空间是  $\mathfrak{R}'^*$  的一个全子空间, 故在一定意义下, 我们讨

論里的  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{R}'$  可以互換. 与有限情形一样, 对称性在这种情况下是蘊藏着, 但可由引入双綫性形式的概念及左向量空間  $\mathfrak{R}$  与右向量空間  $\mathfrak{R}'$  之間的对偶性概念而显露出来. 如果  $g(x, y')$  是双綫性形式, 而对于所有  $y' \in \mathfrak{R}'$ , 能从  $g(x, y') = 0$  推得  $x = 0$ , 及对于所有  $x \in \mathfrak{R}$ , 能从  $g(x, y') = 0$  推得  $y' = 0$ , 則这个双綫性形式  $g(x, y')$  叫做非退化的. 如果双綫性形式  $g(x, y')$  是非退化的, 則說左向量空間  $\mathfrak{R}$  与右向量空間  $\mathfrak{R}'$  是关于  $g(x, y')$  对偶的. 如果  $\mathfrak{R}'$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空間, 則  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{R}'$  是关于双綫性形式  $s(x, f) = f(x) = x(f)$  对偶的. 反过来, 如果  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{R}'$  是关于  $g(x, y')$  对偶的, 則每个  $y' \in \mathfrak{R}'$  定义  $\mathfrak{R}$  上一个綫性函数  $g_{y'}(x)$ , 而映照  $y' \rightarrow g_{y'}$  是  $\mathfrak{R}'$  到  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空間上的 1—1 綫性变换. 同理,  $g(x, y')$  可用于定义  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{R}'^*$  的一个全子空間上的 1—1 綫性映照.

关于全子空間的結果可直接轉移到对偶空間. 特别是两个对偶空間的每个在另一个里定义一个拓扑, 它与共軛空間里的有限拓扑对应. 故令  $\mathfrak{R}$  及  $\mathfrak{R}'$  是对偶的, 并令  $\phi(\mathfrak{R}')$  是与  $\mathfrak{R}'$  对应的  $\mathfrak{R}^*$  的全子空間. 則  $\phi(\mathfrak{R}')$  有由  $\mathfrak{R}^*$  繼承的一个拓扑:  $\phi(\mathfrak{R}')$  的各个开集合都是  $\mathfrak{R}^*$  的各个开集合与集合  $\phi(\mathfrak{R}')$  的交 (这是标准子空間拓扑). 今可使用  $\phi(\mathfrak{R}')$  与  $\mathfrak{R}'$  之間的 1—1 对应把  $\phi(\mathfrak{R}')$  的拓扑轉移为  $\mathfrak{R}'$  里一个拓扑, 得出的結果是:  $\mathfrak{R}'$  的开集合都是基本开集合  $O(x_i; \beta_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) 的邏輯和, 这里  $O(x_i; \beta_i)$  是能使  $g(x_i, y') = \beta_i$  的  $y' \in \mathfrak{R}'$  的全体.  $\mathfrak{R}'$  的这个拓扑将叫做  $\mathfrak{R}$ -拓扑. 仿此可定义  $\mathfrak{R}$  的一个  $\mathfrak{R}'$ -拓扑.

令  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{R}'$  是关于  $g(x, y')$  对偶的. 与有限維情形一样, 如果  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  的一个子空間, 則以  $j(\mathfrak{S})$  表示  $\mathfrak{R}'$  的子空間, 它的向量  $y'$  与  $\mathfrak{S}$  里每个  $x$  关联, 亦即使  $g(x, y') = 0$ . 同理,  $\mathfrak{R}$  的  $j(\mathfrak{S}')$  的一个子空間可与  $\mathfrak{R}'$  的每个子空間  $\mathfrak{S}'$  相伴. 下面法則是容易建立的:

- (i) 如果  $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2$ , 則  $j(\mathfrak{S}_1) \subseteq j(\mathfrak{S}_2)$ ,
- (ii)  $j(j(\mathfrak{S}_1)) \supseteq \mathfrak{S}_1$ ,
- (iii)  $j(j(j(\mathfrak{S}_1))) = j(\mathfrak{S}_1)$ .

前两个是显然的. 要証 (iii) 可用  $j(\mathfrak{S}_1)$  代替 (ii) 里的  $\mathfrak{S}_1$ , 則得  $j(j(j(\mathfrak{S}_1))) \supseteq j(\mathfrak{S}_1)$ . 另一方面, 因为  $j(j(\mathfrak{S}_1)) \supseteq \mathfrak{S}_1$ , 由 (i) 推得  $j(j(j(\mathfrak{S}_1))) \subseteq j(\mathfrak{S}_1)$ . 如果  $\mathfrak{R}$  (因此  $\mathfrak{R}'$ ) 是有限維的, 則映照  $\mathfrak{S} \rightarrow j(\mathfrak{S})$  是  $\mathfrak{R}$  的子空間格到  $\mathfrak{R}'$  的子空間格上的 1-1 映照. 但在无限維情形不必成立. 例如, 令  $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^*$ , 这里  $\mathfrak{R}^*$  是完全共軛空間, 如果  $\mathfrak{R}'$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空間与  $\mathfrak{R}^*$  不同, 則即使  $\mathfrak{R}' \neq \mathfrak{R}^*$ , 可有  $j(\mathfrak{R}') = 0 = j(\mathfrak{R}^*)$ . 今將証:  $j$ -映照誘导出  $\mathfrak{R}$  的閉子空間的集合到  $\mathfrak{R}'$  的閉子空間的集合上的一个 1-1 映照.

首先观察到, 如果  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  的任意子空間, 則双綫性形式  $g$  决定結連空間  $\mathfrak{S}$  与商空間  $\mathfrak{R}' - j(\mathfrak{S})$  的一个双綫性形式  $\bar{g}$ . 我們用  $\bar{g}(x, \bar{y}') = g(x, y')$  来定义  $\bar{g}(x, \bar{y}')$ , 这里  $\bar{y}' = y' + j(\mathfrak{S})$ . 因为  $y'$  的两种选择是对模  $j(\mathfrak{S})$  同余的, 按这个方法显然得  $(x, \bar{y}')$  的集合到  $\Delta$  内的一个单值映照. 我們可直接驗証:  $\bar{g}$  是一个双綫性形式. 如果  $x \in \mathfrak{S}$  是非零的, 則知有一个  $y'$  存在使  $g(x, y') \neq 0$ . 于是,  $\bar{g}(x, \bar{y}') \neq 0$ . 另一方面, 假定  $\bar{y}'$  是  $\mathfrak{R}' - j(\mathfrak{S})$  里一个向量, 对于所有  $x \in \mathfrak{S}$  能使  $\bar{g}(x, \bar{y}') = 0$ , 則对于所有  $x$ ,  $g(x, y') = 0$ , 而  $y' \in j(\mathfrak{S})$ . 故  $\bar{y}' = 0$ . 这些提示指出: 两个向量空間  $\mathfrak{S}, \mathfrak{R}' - j(\mathfrak{S})$  是关于双綫性形式  $\bar{g}$  对偶的. 今可証下面的定理.

**定理 4.** 如果  $\mathfrak{S}'$  是  $\mathfrak{R}'$  的一个子空間, 則  $j(j(\mathfrak{S}'))$  是  $\mathfrak{S}'$  在  $\mathfrak{R}'$  的  $\mathfrak{R}$ -拓扑里的閉包, 特別是,  $\mathfrak{S}'$  是閉的必須而且只須  $j(j(\mathfrak{S}')) = \mathfrak{S}'$ .

**証** 由拓扑的定义直接知, 如  $j(\mathfrak{S}), j(\mathfrak{S}')$  形状的子空間都是閉的. 因为  $j(j(\mathfrak{S}')) \supseteq \mathfrak{S}'$ , 故  $j(j(\mathfrak{S}')) \supseteq \text{Cl } \mathfrak{S}'$ . 反过来, 令  $u' \in j(j(\mathfrak{S}'))$  并考虑  $u'$  的任意邻域  $O(x_i; g(x_i, u'))$ . 令  $\mathfrak{X}$  是由  $x_i$  生成的有限維空間, 并令  $(y_1, y_2, \dots, y_r)$  是这个空間的一个基, 使  $(y_1, y_2, \dots, y_s)$  是  $j(\mathfrak{S}') \cap \mathfrak{X}$  的一个基. 陪集  $\bar{y}_k = y_k + j(\mathfrak{S}')$  ( $k = s+1, \dots, r$ ) 在  $\mathfrak{R} - j(\mathfrak{S}')$  里是綫性无关的. 因为  $\mathfrak{S}'$  与  $\mathfrak{R} - j(\mathfrak{S}')$  关于  $\bar{g}(x + j(\mathfrak{S}'), y') = g(x, y')$  是对偶的, 故由前节的引理可推得有一个  $v' \in \mathfrak{S}'$  存在使  $\bar{g}(y_k + j(\mathfrak{S}'), v') = g(y_k, u')$  ( $k = s+1, \dots, r$ ) 成立. 故  $g(y_k, v') = g(y_k, u')$ . 另一方面,

$g(y_i, v') = 0 = g(y_i, u') \ (j = 1, 2, \dots, s)$ , 所以  $v' \in O(y_i; g(y_i, u'))$ , 因为  $O(y_i; g(y_i, u')) = O(x_i; g(x_i, u')) \ (i = 1, 2, \dots, r)$ , 所以  $v'$  在  $u'$  的给定邻域  $O(x_i; g(x_i, u'))$  里. 这指出  $u' \in \text{Cl } \mathfrak{S}'$ ; 于是,  $\text{Cl } \mathfrak{S}' = j(j(\mathfrak{S}'))$ , 这是所要证的.

今考虑映照  $\mathfrak{S} \rightarrow j(\mathfrak{S})$ , 这里  $\mathfrak{S}$  周历  $\mathfrak{R}$  的闭子空间的集合, 因为对于闭子空间  $\mathfrak{S}$  有  $j(j(\mathfrak{S})) = \mathfrak{S}$ , 这个映照显然是 1—1 的, 因为  $\mathfrak{R}'$  的每个闭子空间有形状  $\mathfrak{S}' = j(j(\mathfrak{S}'))$ , 映照是映到  $\mathfrak{R}'$  的闭子空间的集合上的一个映照. 这证明了前此所作的论断.

任意给定的向量空间的偶空间的存在使我们能够把在有限情形关于任意右向量空间  $\mathfrak{R}'$  及任意左向量空间  $\mathfrak{S}$  的直接积群的存在证明<sup>1)</sup> 移用于无限情形. 与前一一样, 令  $\mathfrak{R}$  是  $\mathfrak{R}'$  关于双线性形式  $g$  的偶空间, 考虑具有形状

$$x \rightarrow \sum_1^m g(x, x'_i) y_i$$

的  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{S}$  内的线性变换的集合  $\mathfrak{P}$ , 这里  $x'_i \in \mathfrak{R}'$  而  $y_i \in \mathfrak{S}$ . 我们立知  $\mathfrak{P}$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  的一个子群, 如果  $x' \in \mathfrak{R}'$  而  $y \in \mathfrak{S}$ , 则定义  $x' \times y$  是属于群  $\mathfrak{P}$  的线性变换  $x \rightarrow g(x, x') y$ . 于是, 与有限情形一样, 可验证  $\mathfrak{P}$  是  $\mathfrak{R}'$  与  $\mathfrak{S}$  的一个直接积群,  $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ .

这个基本定义容许我们把前面许多直接积的讨论转移于无限情形. 特别是可用它来定义域上任意向量空间的克伦内克积及任意(非结合)代数的克伦内克积. 我们还可定义扩张空间  $\mathfrak{R}_\Sigma$ , 这里  $\mathfrak{R}$  是任意向量空间而  $\Sigma$  是  $\mathfrak{R}$  的基域  $\Phi$  的任意扩张域. 克伦内克乘法的初等性质如交换性及结合性的证明没有用到有限性, 所以这些性质在一般情形下也成立.

## 習 題 70

1. 证明: 如果  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  (在  $\mathfrak{R}$ -拓扑里) 的一个闭子空间, 而  $\mathfrak{S}$  是有限维, 则  $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}^\perp$  是闭子空间.
2. 令  $\mathfrak{S}$  是域  $\Phi$  上一个有限维向量空间, 并令  $\mathfrak{R}$  是  $\Phi$  上一个任意向量空间. 证

1) 参看第七章, § 1.



明:  $\mathcal{L}(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}, \mathfrak{R} \times \mathfrak{S})$  是  $\mathcal{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$  及  $\mathcal{L}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$  关于第七章的 §5 里所定义的  $A \times B$  的克伦内克积.

3. 証明: 第2題的結果对于无限維的  $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$  不能成立.

4. 令  $\{\mathfrak{R}_\alpha\}$  是域  $\Phi$  上向量空間  $\mathfrak{R}$  的子空間的集合, 并令  $\Sigma$  是  $\Phi$  的一个扩张域. 証明:  $(\cap \mathfrak{R}_\alpha)_\Sigma = \cap \mathfrak{R}_{\alpha\Sigma}$  在  $\mathfrak{R}_\Sigma$  里成立.

**9. 綫性变换环里双侧理想** 与有限情形一样, 定义一个綫性变换  $A$  的秩  $\rho(A)$  为象空間  $\mathfrak{R}A$  的維数. 仿此, 定义  $\nu(A)$  为使  $zA=0$  的向量  $z$  的核空間  $\mathfrak{N}_A$  的維数. 如果  $\mathfrak{N}_1$  是  $\mathfrak{N}_A$  的一个余空間, 因此  $\mathfrak{R} = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_A$ , 則  $A$  是  $\mathfrak{N}_1$  到  $\mathfrak{N}_1A = \mathfrak{R}A$  上的一个 1—1 映照. 所以  $\dim \mathfrak{R}A = \dim \mathfrak{N}_1$ , 并且由此可与前面一样推得  $\rho(A) + \nu(A) = \dim \mathfrak{R}$ . 我們也容易証明下面的重要关系:

$$1. \quad \rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B).$$

$$2. \quad \rho(AB) \leq \min(\rho(A), \rho(B)).$$

这些公式容許我們定义一个无限維向量空間的綫性变换环  $\mathcal{L}$  里某种真双侧理想. 令  $e$  是任意的无限基数, 使  $e \leq b = \dim \mathfrak{R}$ , 并且令  $\mathcal{L}_e$  是綫性变换  $A_e$  的集合要使

$$\rho(A_e) < e.$$

因为  $\rho(-A_e) = \rho(A_e)$ , 所以  $\mathcal{L}_e$  含有这个集合里每个綫性变换的負变换. 又因为两个基数中有一个是无限时, 它們的和是两个基数中的較大的一个, 由使用 1. 故知:  $\mathcal{L}_e$  在加法下是閉的. 最后 2. 指出  $\mathcal{L}_e$  在用  $\mathcal{L}$  的任意元素作乘法下是閉的. 故  $\mathcal{L}_e$  是一个双侧理想.

如果  $e$  与  $e'$  都是  $\leq b$  的两个无限基数, 而  $e < e'$ , 則  $\mathcal{L}_e \subset \mathcal{L}_{e'}$ ; 这因为,  $\mathcal{L}_e$  显然  $\subseteq \mathcal{L}_{e'}$ . 再則, 对于任意給定的秩  $\leq b$ , 有綫性变换存在; 这因为, 我們可由选取  $\mathfrak{R}$  的一个基及具有給定基数的一个子集合  $(e_k)$  以得出这样的变换. 于是, 使  $e_k \rightarrow e_k$  而  $i \neq k$  时  $e_i \rightarrow 0$  的綫性变换具有所需的秩. 今秩  $e$  的綫性变换都属于  $\mathcal{L}_{e'}$  而不属于  $\mathcal{L}_e$ , 所以  $\mathcal{L}_e \neq \mathcal{L}_{e'}$ ; 因此,  $\mathcal{L}_e \subset \mathcal{L}_{e'}$ . 故知对应  $e \rightarrow \mathcal{L}_e$  是 1—1 的.

$\mathcal{L}$  的双侧理想的主要結果是: 理想  $\mathcal{L}_e$  是  $\mathcal{L}$  里仅有的真双侧理想. 要証这个事实, 需要下面的引理.

**引理** 如果  $A$  及  $B \in \mathcal{L}$ , 而  $\rho(B) \leq \rho(A)$  則  $\mathcal{L}$  里有  $P$  及  $Q$  存

在使  $B = PAQ$ .

証 命  $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2$ , 这里  $\mathfrak{N}_1$  是  $A$  的核空間; 同理可写  $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_2 \oplus \mathfrak{N}_B$ . 令  $(x_k)$  是  $\mathfrak{N}_1$  的一个基, 而  $(y_l)$  是  $\mathfrak{N}_2$  的一个基. 因为  $\dim \mathfrak{N}_1 = \dim \mathfrak{N}A \geq \dim \mathfrak{N}B = \dim \mathfrak{N}_2$ , 故可建立  $(y_l)$  到  $(x_k)$  内的一个 1—1 对应  $y_l \rightarrow x_l$ . 令  $P$  是把  $y_l$  映到  $x_l$  内而把  $\mathfrak{N}_B$  映到 0 内的綫性变换. 因为向量  $x_lA$  构成一个綫性无关集合, 故有一个綫性变换  $Q$  存在使  $(x_lA)Q = y_lB$ . 于是,

$$y_lPAQ = x_lAQ = y_lB,$$

$$zPAQ = 0 \quad (z \in \mathfrak{N}_B).$$

所以  $PAQ = B$ , 即为所求.

今設  $\mathfrak{B}$  是  $\mathfrak{L}$  里任意的真双侧理想. 令  $e$  是最小无限基数使对于所有  $B \in \mathfrak{B}$ ,  $e > \rho(B)$ . 如果  $\mathfrak{B}$  含有秩  $b = \dim \mathfrak{N}$  的一个綫性变换  $B$ , 而  $A$  是  $\mathfrak{N}$  的任意綫性变换, 則  $A$  的秩  $\leq B$  的秩. 故由引理得  $A = PBQ \in \mathfrak{B}$ . 于是,  $\mathfrak{B} = \mathfrak{L}$ ; 这与假设矛盾. 因此, 对于每个  $B \in \mathfrak{B}$  有  $b > \rho(B)$ , 故  $e \leq b$ . 因为  $e \leq b$ , 故由定义指出  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{L}_e$ . 另一方面, 令  $C$  是  $\mathfrak{L}_e$  的任意元素, 則  $\rho(C) < e$ ; 并且, 如果  $\rho(C)$  是无限的, 則必有一个  $B \in \mathfrak{B}$  存在使  $\rho(B) \geq \rho(C)$ . 由引理知, 这可推得  $C \in \mathfrak{B}$ . 如果  $\rho(C)$  是有限的, 則同样可証得  $C \in \mathfrak{B}$ , 除非对于每个  $B$  有  $\rho(C) > \rho(B)$ . 无论怎样我們可推得  $\mathfrak{B}$  含有秩 1 的每个綫性变换. 今将指出: 有限秩的任意变换是秩 1 的变换的和. 要証这个結果, 命  $\mathfrak{N}C = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ , 这里  $y_i$  是綫性无关的. 于是, 对于任意  $x$  有

$$xC = \phi_1(x)y_1 + \phi_2(x)y_2 + \dots + \phi_m(x)y_m.$$

显然  $\phi_i(x)$  是綫性函数, 而使  $xC_i = \phi_i(x)y_i$  的映照  $C_i$  是秩 1 的一个綫性变换. 显然  $C = C_1 + C_2 + \dots + C_m$ , 并且因为我們知道  $C_i \in \mathfrak{B}$ , 故知  $C \in \mathfrak{B}$ . 于是,  $\mathfrak{L}_e$  里每个  $C$  是属于  $\mathfrak{B}$ , 而  $\mathfrak{B} = \mathfrak{L}_e$ . 这証明了

**定理 5.** 令  $\mathfrak{L}$  是无限維向量空間  $\mathfrak{N}$  里綫性变换的環. 对于每个无限基数  $e \leq \dim \mathfrak{N}$ , 我們定义  $\mathfrak{L}_e$  为秩  $< e$  的綫性变换的全体, 則  $\mathfrak{L}_e$  是  $\mathfrak{L}$  里一个真双侧理想, 并且任意的真双侧理想必与一

个  $\mathfrak{L}_e$  重合.

我們已知, 如果  $e$  及  $e'$  是  $\leq b$  的两个无限基数, 而且  $e < e'$ , 則  $\mathfrak{L}_e \subset \mathfrak{L}_{e'}$ . 所以定理 5 指出对应  $e \rightarrow \mathfrak{L}_e$  是  $< b$  的无限基数的集合到  $\mathfrak{L}$  里真理想集合上的一个格同构. 特别是我們知道  $\mathfrak{L}$  至少有一个真双侧理想  $\mathfrak{L}_e$ , 这里  $e$  是阿列夫零. 这个理想由有限秩的变换构成, 此后用  $\mathfrak{F}$  表示它. 显然  $\mathfrak{F}$  含于  $\mathfrak{L}$  的每个非零双侧理想里.

**10. 綫性变换的稠密环** 关于有限維向量空間的綫性变换环的一些結果可扩张于綫性变换的任意稠密环. 我們知道, 綫性变换的集合  $\mathfrak{A}$  是在有限拓扑里稠密的必須而且只須对于向量的任意两个有序的有限集合  $(x_1, x_2, \dots, x_m), (y_1, y_2, \dots, y_m)$ , 其中  $x_i$  是綫性无关的, 有一个  $A \in \mathfrak{A}$  存在使  $x_i A = y_i (i = 1, 2, \dots, m)$ .

首先要讲綫性变换的任意稠密环  $\mathfrak{A}$  是自同态的一个不可約集合; 亦即加法羣  $\mathfrak{R}$  的子羣中, 能够由  $\mathfrak{A}$  映到自身内的子羣只有  $\mathfrak{R}$  及  $0$ . 这因为, 令  $\mathfrak{S}$  是这样一个子羣; 如果  $\mathfrak{S} \neq 0$ , 則它含有一个向量  $x \neq 0$ . 如果  $y$  是  $\mathfrak{R}$  里任意向量, 則可找出一个  $A \in \mathfrak{A}$  使  $x A = y$ . 于是,  $y \in \mathfrak{S}$ . 因为  $y$  是任意的, 这就証明了  $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$ .

关于稠密环的另一个显著的結果是: 羣  $\mathfrak{R}$  的自同态中能与每个  $A \in \mathfrak{A}$  可交换的只有純量乘法. 这是前章定理 2 的一个推广. 它的証明可逐句移用于現在情形.

要作出綫性变换的所有稠密环, 并把它們分类是很困难的; 但对于含有有限秩的非零变换的这样稠密环类的一个重要子类很多都可作出并予以分类. 本节余下部分及后两节将讲述这个类型的环的理論.

我們先給出作这样环的一个方法, 它将被証明是完全一般的方法. 我們从共軛空間  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空間  $\mathfrak{R}'$  开始, 并令  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}' | \mathfrak{R})$  表示綫性变换  $A$  的全体, 这里要  $A$  的折转变換  $A^*$  把  $\mathfrak{R}'$  映到它自身内. 我們知道,  $A^*$  是綫性变换  $f \mapsto f A^*$ , 这里  $f A^*(x) = f(x A)$ . 今令  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$  是  $\mathfrak{R}'$  的任意元素,  $u_1, u_2, \dots, u_m$  是  $\mathfrak{R}$  里任意向量, 并令  $F = \sum_1^m \phi_i \times u_i$ . 我們知道, 后者意味着  $F$  是綫性

变换  $x \rightarrow \sum_1^m \phi_i(x)u_i$ , 故  $F$  是有限秩的, 如果  $f$  是任意线性函数, 则还有  $fF^*(x) = \sum \phi_i(x)f(u_i)$ , 所以,  $fF^*$  是  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$  的一个线性组合; 因此  $F^* \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ . 这证明:  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  含有有限秩的非零变换. 令  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ , 它是含于  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的有限秩变换的全体.

我们今证  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  是在  $\mathfrak{L}$  里稠密的, 这因为, 令  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  是线性无关的, 并令  $(u_1, u_2, \dots, u_m)$  是  $\mathfrak{R}$  里任意向量. 因为  $\mathfrak{R}'$  是全子空间, 所以它含有使  $\phi_i(y_j) = \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, m$ ) 的线性函数  $\phi_i$ . 于是, 线性变换  $F = \sum \phi_i \times u_i \in \mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ , 而  $y_i F = u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 即得所求.

由  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的定义显然知这个集合是  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) (= \mathfrak{L}(\mathfrak{R}^*|\mathfrak{R}))$  的一个子环. 同理,  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  是  $\mathfrak{L}$  的一个子环. 今令  $\mathfrak{A}$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的任意子环, 它含有  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ . 因为  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  是稠密的, 故  $\mathfrak{A}$  是稠密的,  $\mathfrak{A}$  含有有限秩的非零变换也是显然的.

反过来, 令  $\mathfrak{A}$  是使  $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F} \neq 0$  的线性变换的任意稠密环. 令  $\mathfrak{R}'$  是  $\mathfrak{R}^*$  的子空间, 由

$$(7) \quad \mathfrak{R}' = \sum_{F \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}} \mathfrak{R}^* F^*$$

决定的, 亦即  $\mathfrak{R}'$  是含有空间  $\mathfrak{R}^* F^*$  的  $\mathfrak{R}^*$  的最小子空间, 这里  $F \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}$ . 则我们将证明  $\mathfrak{R}'$  是全子空间, 并且  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ .  $\mathfrak{R}'$  的全体可由下面引理得出, 这引理自身是有趣的.

**引理 1.** 如果  $\mathfrak{A}$  是自同态的不可约环, 则  $\mathfrak{A}$  的任意非零双侧理想  $\mathfrak{B}$  是不可约的.

证 如果  $x$  是  $\mathfrak{A}$  所作用的群  $\mathfrak{R}$  的一个非零元素, 则元素  $xB$  (这里  $B \in \mathfrak{B}$ ) 的集合  $x\mathfrak{B}$  是关于  $\mathfrak{A}$  不变的一个子群. 所以  $x\mathfrak{B} = \mathfrak{R}$ , 或  $x\mathfrak{B} = 0$ . 如果  $x\mathfrak{B} = 0$ , 则带有这个性质的  $x$  的集合  $\mathfrak{S}$  不是 0. 但  $\mathfrak{S}$  也是关于  $\mathfrak{A}$  不变的一个子群, 所以  $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$ . 于是,  $\mathfrak{R}\mathfrak{B} = 0$ , 这与  $\mathfrak{B} \neq 0$  矛盾. 于是证得对于每个非零的  $x$ ,  $x\mathfrak{B} = \mathfrak{R}$  成立.  $\mathfrak{R}$  关于  $\mathfrak{B}$  的不可约性是这个结果的一个直接推论.

今可証由 (7) 所決定的空間  $\mathfrak{R}'$  是全子空間。我們知道,  $\mathfrak{F}$  是  $\mathfrak{L}$  里一个雙側理想, 所以  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}$  是  $\mathfrak{A}$  里一个非零雙側理想; 故由引理 1 知:  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}$  是不可約的。如果  $x \neq 0$  属于  $\mathfrak{A}$ , 則可找到一個  $F \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}$  使  $xF \neq 0$ 。我們还可找到一個綫性函数  $f$  使  $f(xF) \neq 0$ 。于是,  $fF^*(x) \neq 0$  而  $fF^* \in \mathfrak{R}'$ 。所以,  $\mathfrak{R}'$  是全子空間。

今令  $A \in \mathfrak{A}$ 。因为  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{A}$  是  $\mathfrak{A}$  里一个理想, 故有下面的关系:

$$\mathfrak{R}'A^* = \sum \mathfrak{R}^*F^*A^* = \sum \mathfrak{R}^*(AF)^* \subseteq \mathfrak{R}'.$$

于是, 我們証明了  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ 。要証其它包含关系  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{A}$ , 就需要下面的引理。

**引理 2.** 令  $F$  是有限秩的一个變換, 并令  $\mathfrak{R}F = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ , 这里  $u_i$  是綫性无關的, 則有一种方法而且只有一种方法把  $F$  寫成  $\sum_1^m \phi_i \times u_i$ , 这里  $\phi_i \in \mathfrak{R}^*$ ;  $\phi_i$  也是綫性无關的, 并且  $\mathfrak{R}'F^* = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]$  对于  $\mathfrak{R}^*$  的每个全子空間  $\mathfrak{R}'$  成立。

**証** 我們已知 (§ 9)  $F$  具有形状  $\sum_1^m \phi_i \times u_i$ 。唯一性也在前面討論直接积时講过<sup>1)</sup>; 所以引理的前一部分成立。今令  $f \in \mathfrak{R}^*$ , 則  $fF^* = \sum \phi_i f(u_i)$ ; 所以  $\mathfrak{R}^*F^* \subseteq [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]$ 。另一方面, 如果  $\mathfrak{R}'$  是稠密的, 則可在  $\mathfrak{R}'$  里找出  $g_i$  使  $g_i(u_j) = \delta_{ij}$ 。于是,  $g_i F^* = \phi_i$ , 从而  $[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m] \subseteq \mathfrak{R}'F^*$ 。这完成了証明。

今令  $F \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ , 并写下  $F = \sum \phi_i \times u_i$ , 这里  $u_i$  构成  $\mathfrak{R}F$  的一个基。則  $\mathfrak{R}'F^* = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]$ , 而  $\phi_i \in \mathfrak{R}'$ 。故对于适宜的  $F_j \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}$  所有  $\phi_i \in \mathfrak{R}^*F_1^* + \mathfrak{R}^*F_2^* + \dots + \mathfrak{R}^*F_n^*$ 。今把前面引理用于  $F_j$ , 并写  $F_j = \sum_k \phi_{jk} \times v_{jk}$ , 这里  $v_{jk}$  构成  $\mathfrak{R}F_j$  的一个基, 而  $\phi_{jk}$  构成  $\mathfrak{R}^*F_j^*$  的一个基。則对于  $\Delta$  里适宜的  $\mu_{jk,i}$ ,  $\phi_i = \sum_{j,k} \phi_{jk} \mu_{jk,i}$ 。因为  $\mathfrak{A}$  是稠密的, 而对于固定的  $j$ ,  $v_{jk}$  是綫性无关的, 所以可找到  $A_{ji} \in \mathfrak{A}$  使

1) 見第七章 § 1 的中段及本章 § 8 的末段。

$$(8) \quad v_{jk}A_{ji} = \mu_{jk,i}u_i \quad (k = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, m),$$

今变换  $\sum_{j,i} F_j A_{ji} \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{U}$ , 而

$$\begin{aligned} \sum_{j,i} F_j A_{ji} &= \sum_{i,i} \left( \sum_k \phi_{jk} \times v_{jk} \right) A_{ji} = \sum_{i,i,k} \phi_{jk} \times v_{jk} A_{ji} \\ &= \sum_{i,j,k} \phi_{jk} \times \mu_{jk,i} u_i = \sum_i \left( \sum_{j,k} \phi_{jk} \mu_{jk,i} \right) \times u_i \\ &= \sum \phi_i \times u_i = F. \end{aligned}$$

故  $F \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{U}$ . 这完成了下面结构定理的证明:

**定理 6.** 令  $\mathfrak{R}'$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空间, 并令  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  是綫性变换  $A$  的全体, 这里  $A$  的折转变换把  $\mathfrak{R}'$  映到它自身内, 则含有  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  里的任意子环  $\mathfrak{U}$  是綫性变换的一个稠密环, 它含有有限秩的非零变换. 反过来, 綫性变换的任意稠密环, 它含有有限秩的非零变换时, 都可这样得出.

实际上我們的論証里建立的結果比定理所說的内容更多. 譬如, 我們有由給定的环  $\mathfrak{U}$  所决定的全子空間  $\mathfrak{R}'$  的公式 (7). 由上面的討論还容易知道  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{R}$ , 它是映照  $\sum \phi_i \times u_i$  的全体, 这里  $\phi_i \in \mathfrak{R}'$ ,  $u_i \in \mathfrak{R}$ . 如果从  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  及  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  之間的一个环开始, 則由 (7) 所决定的空間是  $\mathfrak{R}'$  自身. 这些結果証讀者自己驗証.

这个主要定理还可借对偶空間說成更对称的形状. 要达到这个目的, 令  $\mathfrak{R}$  及  $\mathfrak{R}'$  是关于双綫性形式  $g$  对偶的, 則得  $\mathfrak{R}'$  到  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空間  $\mathfrak{S}^*$  上的自然等价: 如果  $y' \in \mathfrak{R}'$ , 則  $y'R$  是綫性函数  $g_{y'}(x) = g(y', x)^{1)}$ . 如果  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{S}^*|\mathfrak{R})$ , 則  $A' = RA^*R^{-1}$  是  $\mathfrak{R}'$  到它自身内的一个綫性变换. 我們叫  $A'$  做  $A$  关于  $g$  的折转变换. 与有限維情形一样, 对于所有  $x \in \mathfrak{R}$  及所有  $y' \in \mathfrak{R}'$ ,  $A'$  适合条件

$$(9) \quad g(xA, y') = g(x, y'A').$$

反过来, 令  $A$  是  $\mathfrak{R}$  里任意綫性变换, 而对于  $A$  存在有  $\mathfrak{R}'$  里一个綫性变换  $A'$  使 (9) 成立; 則  $g_{y'}A^* = g_{y'A'} \in \mathfrak{S}^*$ , 而  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{S}^*|\mathfrak{R})$ . 故

1) 参看第五章 § 1.

$A'$  是  $A$  关于  $g$  的折转变换. 至此,  $\mathfrak{L}(\mathfrak{S}^*|\mathfrak{R})$  自然也可表示为  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ . 在这个环里, 有限秩的变换有形状  $\sum y'_i \times x_i$ , 这里与通常一样, 它表示映照  $x \rightarrow \sum g(x, y'_i)x_i$ .  $\sum y'_i \times x_i$  在  $\mathfrak{R}'$  里的折转变换是  $\sum y'_i \times' x_i$ , 这里  $y'(\sum y'_i \times x_i) = \sum y'_i g(x_i, y')$ . 所以, 集合  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  与 (按同样方法定义的)  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R}')$  在映照  $A \rightarrow A'$  下对应.

至此可给出定理 6 利用对偶空间的說法.

**定理 6'.** 令  $\mathfrak{R}$  及  $\mathfrak{R}'$  是对偶向量空间, 并令  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  表示  $\mathfrak{R}$  里綫性变换的全体, 它在  $\mathfrak{R}'$  里有折转变换. 则  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的任意子环, 它含有  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  时, 是  $\mathfrak{R}$  里綫性变换的一个稠密环, 而这个环含有有限秩的非零变换. 反过来, 綫性变换的任意稠密环, 它含有有限秩的非零变换时, 都可这样得出.

由这个說法显然  $\mathfrak{R}'$  里折转变换  $A'$  的集合  $\mathfrak{R}'$  是  $\mathfrak{R}'$  里一个稠密环, 含有有限秩的变换. 映照  $A \rightarrow A'$  是  $\mathfrak{R}$  到  $\mathfrak{R}'$  上的一个反同构.

## 習 題 71

1. 令  $\mathfrak{R}$  是  $\Delta$  上向量空间带有一个可数基, 并令  $\mathfrak{R}$  是綫性变换的全体, 这些变换关于这个基的陣的形状为

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

这里  $A$  是一个有限陣. 証明:  $\mathfrak{R}$  是一个稠密环.

2. 令  $\mathfrak{R}$  与第 1 题一样, 并令  $\mathfrak{R}'$  是量子空间  $[\phi_1, \phi_2, \dots]$ , 这里  $\phi_i(e_j) = \delta_{ij}$ , 而  $(e_j)$  是一个基. 証明:  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  必須而且只須它关于基  $(e_i)$  的陣是行有限及列有限的.

3. 令  $U$  及  $V$  是  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}$  里綫性变换, 它們的陣是

$$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & \ddots & \ddots \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cccc} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \\ & & 1 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{array} \right).$$

証明: 由  $U$  及  $V$  生成的代数  $\Phi[U, V]$  是稠密的, 并且含有有限秩的变换.

4. 驗證: 如果向量  $(e_i)$  与  $(\phi_i)$  是相余的 ( $\phi_i(e_k) = \delta_{ik}$ ), 则綫性变换  $e_{ik} = \phi_i \times e_k$  适合陣单位的乘法表:

5. (李托夫). 证明:  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的任意有限子集可嵌入一个子环里, 这子环是与一个有限矩阵环  $\Delta_n$  同构的.

6. 证明:  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{R}$  的任意右理想的形状为  $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$ , 这里  $\mathfrak{S}'$  是  $\mathfrak{R}'$  的一个子空间, 而任意左理想的形状为  $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{S}$ , 这里  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  的一个子空间(参看第八章, §§ 3, 4).

7. 证明:  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  是单纯的.

8. 证明:  $A$  在  $\mathfrak{R}'$  里有一个折转变换必须而且只须  $A$  是  $\mathfrak{R}$  (赋予  $\mathfrak{R}'$ -拓扑) 到它自身内的一个连续映照.

**11. 同构定理** 今来讨论线性变换的稠密环(它含有有限秩的非零变换)的同构问题. 为着这个目的, 我们使用结构定理的原来形状, 亦即  $\mathfrak{U}$  可夹在两个环之间如  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R}) \supseteq \mathfrak{U} \supseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ , 这里  $\mathfrak{R}'$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空间. 我们已知<sup>1)</sup>  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的每个右理想具有形状  $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$ , 这里  $\mathfrak{S}'$  是  $\mathfrak{R}'$  的一个子空间. 现在如果  $A$  是  $\mathfrak{R}$  里任意线性变换, 则  $(\sum \psi_i \times x_i)A = \sum \psi_i \times x_i A$ . 所以  $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$  实质上是  $\mathfrak{L}$  里一个右理想, 并且更是  $\mathfrak{U}$  里一个右理想. 如果  $\mathfrak{S}' = [\psi]$  是  $\mathfrak{R}'$  的一个一维子空间, 则显然  $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{R}$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的一个极小右理想. 因为含于  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  里的  $\mathfrak{U}$  的任意右理想显然是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的一个右理想, 我们的说明指出:  $[\psi] \times \mathfrak{R}$  是  $\mathfrak{U}$  的一个极小右理想.

今可将关于  $\mathfrak{U}$  的下面事实列出: 1)  $\mathfrak{U}$  是  $\mathfrak{R}$  里自同态的一个不可约环, 2) 与  $\mathfrak{U}$  里每个  $A$  可交换的自同态的集合是纯量乘法的集合, 及 3)  $\mathfrak{U}$  拥有极小右理想. 这些结果使我们在第八章的 § 5 里关于有限维向量空间的线性变换的环的同构可移用于现在情形.

今将前面使用的论证摘要如下: 令  $\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{U}$  里一个极小右理想, 并令  $x$  是使  $x\mathfrak{S} \neq 0$  的一个向量, 则  $x\mathfrak{S}$  是  $\mathfrak{R}$  由  $\mathfrak{U}$  映到它自身内的一个子群. 于是  $x\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$ . 我们可如前推得映照  $\chi: B \rightarrow xB$  是  $\mathfrak{S}$  到  $\mathfrak{R}$  上的一个算子同构.

今考虑两个同构环  $\mathfrak{U}_i (i = 1, 2)$ , 这里  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'_i|\mathfrak{R}_i) \supseteq \mathfrak{U}_i \supseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'_i|\mathfrak{R}_i)$ , 而  $\mathfrak{R}_i$  是  $\Delta_i$  上一个向量空间,  $\mathfrak{R}'_i$  是  $\mathfrak{R}_i$  里线性函数的一个全子空间. 令  $A_1 \rightarrow A_1\phi$  是  $\mathfrak{U}_1$  到  $\mathfrak{U}_2$  上的一个同构. 在  $\mathfrak{U}_1$  里选取一

1) 参看习题 71 的第 6 组.



个极小右理想  $\mathfrak{I}_1$ , 并令  $\mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}_1\phi$ . 令  $\psi_2$  是  $\mathfrak{I}_2$  到如上决定的  $\mathfrak{R}_2$  内的一个算子同构, 则由第八章的 § 5 的论证知, 映照  $U = \psi_1^{-1}\phi\psi_2$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  上的一个 1—1 半线性变换, 并且对于  $\mathfrak{R}_1$  里所有  $A_1$ ,

$$(10) \quad A_1\phi = U^{-1}A_1U$$

成立. 特别是, 我们与前一样知, 基可除环是同构的, 并且  $\mathfrak{R}_1$  与  $\mathfrak{R}_2$  有相同的维数.

在有限情形需要说的就是这样. 但在无限情形应该增加一个重要说明. 这是关于半线性变换  $U$  的折转变换. 今来定义对于任意半线性变换的这个概念.

令  $S$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  内的任意半线性变换, 并令  $s$  是与  $S$  相伴的  $\Delta_1$  到  $\Delta_2$  上的同构. 则对于任意  $x_1 \in \mathfrak{R}_1$ ,  $(\alpha x_1)S = \alpha^s(x_1S)$ . 今令  $f(x_2)$  是  $\mathfrak{R}_2$  里任意线性函数, 并命

$$g(x_1) = f(x_1S)^{s^{-1}},$$

则  $g$  显然是  $\mathfrak{R}_1$  上一个线性函数. 我们还可直接验证: 映照  $S^*: f \rightarrow g$  是  $\mathfrak{R}_2^*$  到  $\mathfrak{R}_1^*$  内带有相伴同构  $s^{-1}$  的一个半线性变换. 我们叫  $S^*$  做  $S$  的折转. 如同线性变换,

$$(11) \quad (S_1S_2)^* = S_2^*S_1^*.$$

由此可推得, 如果  $S$  有逆变换  $S^{-1}$  ( $\mathfrak{R}_2$  到  $\mathfrak{R}_1$  上带有同构  $s^{-1}$  的一个半线性变换), 因而  $SS^{-1} = 1 = S^{-1}S$ , 则  $S^*(S^{-1})^* = 1 = (S^{-1})^*S^*$ . 于是,  $S^*$  也有一个逆变换. 这等价于说: 如果  $S$  是  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  上的一个 1—1 映照, 则  $S^*$  是  $\mathfrak{R}_2^*$  到  $\mathfrak{R}_1^*$  上的 1—1 映照. 我们观察到,  $F_1$  是  $\mathfrak{R}_1$  里有限秩的一个变换必须而且只须  $U^{-1}F_1U$  是  $\mathfrak{R}_2$  里有限秩的变换. 故  $\phi$  把  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}_1'|\mathfrak{R}_1)$  映到  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}_2'|\mathfrak{R}_2)$  上. 如果引用关于  $\mathfrak{R}_1'$  的公式(7), 我们可验证:  $U^*$  把  $\mathfrak{R}_2'$  映到  $\mathfrak{R}_1'$  上. 这因为

$$\mathfrak{R}_2'U^* = \sum \mathfrak{R}_2^*F_2^*U^* = \sum \mathfrak{R}_2^*U^*F_1^* = \sum \mathfrak{R}_1^*F_1^* = \mathfrak{R}_1'.$$

所以我们可述出下面的同构定理:

**定理 7.** 令  $\mathfrak{R}_i (i = 1, 2)$  是  $\Delta_i$  上一个向量空间, 并令  $\mathfrak{R}_i'$  是  $\mathfrak{R}_i$  上线性函数的一个全子空间. 设  $\mathfrak{U}_i$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_i'|\mathfrak{R}_i)$  的一个子环含有  $\mathfrak{F}(\mathfrak{R}_i'|\mathfrak{R}_i)$ , 并令  $\phi$  是  $\mathfrak{U}_1$  到  $\mathfrak{U}_2$  上的一个同构, 则有  $\mathfrak{R}_1$  到  $\mathfrak{R}_2$  上一个 1—1 半线性变换  $U$  存在, 它的折转把  $\mathfrak{R}_2'$  映到  $\mathfrak{R}_1'$  上并使对于所

有  $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ ,  $A_1\phi = U^{-1}A_1U$ .

这个定理有許多有趣的推論, 这里給出一个, 是习题 66 的第 5 題的推广.

**系 1.** 令  $\mathfrak{R}$  是域  $\Phi$  上一个向量空間, 并令  $\mathfrak{R}'$  是  $\mathfrak{R}^*$  的一个全子空間, 則保持心的元素不變的  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的每个自同構是內自同構.

**証** 显然  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  含有純量乘法的集合  $\Phi_I$ . 又因为与  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的所有元素可交換的自同态只是純量乘法, 所以集合  $\Phi_I$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的心. 如果  $A \rightarrow A\phi$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  里一个自同构, 則有一个半綫性变换  $U$  存在使  $A\phi = U^{-1}AU$ . 如果  $\alpha$  是  $\Phi_I$  里相伴自同构, 則  $U^{-1}\alpha IU = (\alpha'')_I$ . 今假定对于所有  $\alpha$ ,  $\alpha I\phi = \alpha_I$ , 則  $U^{-1}\alpha IU = \alpha_I\phi = \alpha_I$ . 所以,  $\alpha_I = (\alpha'')_I$ ; 因此  $\alpha = 1$ . 故  $U$  是綫性变换. 因为  $U^*$  把  $\mathfrak{R}'$  映到它自身內, 故由定义得  $U \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$ . 因此  $\phi$  是內自同构.

这个結果含有下面的特殊情形:

**系 2.** 域上一个向量空間的綫性变换的環  $\mathfrak{L}$  的每个自同構保持心的元素不變, 則必是內自同構.

## 習 題 72

1. 令  $\Delta$  是任意除环, 具有下面的性質:  $\Delta$  里自同构能保持心的元素不变, 則这些自同构都是內自同构. 証明: 如果  $\mathfrak{R}$  是  $\Delta$  上一个向量空間, 則环  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$  的每个自同构, 它保持心的元素不变时, 必是內自同构.

**12. 反自同构与純量积** 現在考虑求綫性变换的稠密环(它含有有限秩非零变换的)能拥有一个反自同构的条件的問題, 这里使用結構定理的第二种說法較为方便, 亦即給定  $\mathfrak{A}$  作为  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的一个子环含有  $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}'|\mathfrak{R})$  的, 这里  $\mathfrak{R}$  及  $\mathfrak{R}'$  是关于双綫性形式  $g$  对偶的. 引入与  $\Delta$  反同构的除环  $\Delta'$ , 并令  $\alpha \rightarrow \alpha'$  是  $\Delta$  到  $\Delta'$  上的一个固定反同构. 如果取  $x\alpha' = \alpha x$ , 則  $\mathfrak{R}$  可看做  $\Delta'$  上一个右向量空間. 同理, 如果取  $\alpha'x' = x'\alpha$ , 則  $\mathfrak{R}'$  可看做  $\Delta'$  上一个左向量空間.

今設  $A \rightarrow A\psi$  是  $\mathfrak{A}$  里一个反自同构. 如果  $A'$  表示  $A$  关于  $g$

的折轉, 則  $A \rightarrow A'$  是  $\mathfrak{A}$  到一個環  $\mathfrak{A}'$  上的一個反同構, 並且  $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}|\mathfrak{A}') \supseteq \mathfrak{A}' \supseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{A}|\mathfrak{A}')$ . 所以, 映照  $A' \rightarrow A\Psi$  是  $\mathfrak{A}'$  到  $\mathfrak{A}$  上的一個同構. 故由同構定理知, 有  $(\Delta')$  上左向量空間  $\mathfrak{A}'$  到左向量空間  $\mathfrak{A}$  上的一個半綫性變換  $V$  存在使對於所有  $A \in \mathfrak{A}$ ,

$$(12) \quad A\Psi = V^{-1}A'V$$

成立. 半綫性變換  $V$  可用於定義  $\mathfrak{A}$  里一個純量積; 這因為, 我們可令

$$(13) \quad h(x, y) = g(x, yV^{-1}),$$

於是, 顯然有

$$h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y),$$

$$h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2),$$

$$h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y).$$

再則

$$\begin{aligned} h(x, \alpha y) &= g(x, (\alpha y)V^{-1}) = g(x, \alpha^{v^{-1}}(yV^{-1})) \\ &= g(x, (yV^{-1})\alpha^{v^{-1}t^{-1}}) = g(x, yV^{-1})\alpha^{v^{-1}t^{-1}} \\ &= h(x, y)\alpha^{v^{-1}t^{-1}}, \end{aligned}$$

這裡  $v$  是與  $V$  相伴的  $\Delta'$  到  $\Delta$  上的同構. 因為  $v^{-1}$  是  $\Delta$  到  $\Delta'$  上的一個同構, 而  $t^{-1}$  是  $\Delta'$  到  $\Delta$  上的一個反同構,  $v^{-1}t^{-1}$  是  $\Delta$  里一個反自同構. 命  $\bar{\alpha} = \alpha^{v^{-1}t^{-1}}$ ; 於是,  $h(x, \alpha y) = h(x, y)\bar{\alpha}$ , 而  $h$  是關於  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  的  $\mathfrak{A}$  里一個純量積.

$g$  的非退化性與  $V$  的性質易知可推得  $h$  的非退化性. 所以, 如果取  $x\bar{\alpha} = \alpha x$ , 而把  $\mathfrak{A}$  看作  $\Delta$  上一個右向量空間, 則  $\mathfrak{A}$  是關於  $h$  與它自身對偶. 次証:  $\mathfrak{A}$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}|\mathfrak{A})$  的一個子環含有  $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}|\mathfrak{A})$ . 這因為, 如果  $A \in \mathfrak{A}$ , 則

$$\begin{aligned} h(xA, y) &= g(xA, yV^{-1}) = g(x, yV^{-1}A') \\ &= g(x, yV^{-1}A'VV^{-1}) = g(x, yA\Psi V^{-1}) \\ &= h(x, yA\Psi). \end{aligned}$$

故  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{A}|\mathfrak{A})$ , 並且它關於  $h$  的折轉是給定的反同構下的象  $A\Psi$ . 另一方面, 令  $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A}|\mathfrak{A})$ , 則

$$g(xF, y') = h(xF, y'V) = h(x, y'VF\Psi)$$

$$\begin{aligned}
&= h(x, y'VF\Psi V^{-1}V) \\
&= g(x, y'VF\Psi V^{-1});
\end{aligned}$$

所以  $F$  有关于  $g$  的一个折轉, 并且  $F \in \mathfrak{A}$ . 所以, 我們証明了  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R}) \supseteq \mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$ , 并且  $A \rightarrow A\Psi$  是关于  $h$  的折轉映照.

我們还未把  $A\Psi \in \mathfrak{A}$  的事实完全利用. 下面将指出这个条件可推得  $h(x, y)$  是一个弱厄米特純量积, 亦即存在有  $\mathfrak{R}$  到它自身上一个 1—1 半綫性变换  $Q$  使对于所有  $x, y \in \mathfrak{R}$ ,

$$(14) \quad h(x, y) = \overline{h(y, xQ)}$$

成立. 考虑映照  $y_1 \times x_1$ , 亦即  $x \rightarrow h(x, y_1)x_1$ . 我們知道, 这个映照属于  $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$ , 并且它的折轉是  $y \rightarrow y_1 h(x_1, y) = h(x_1, y)^a y_1$ , 这里  $\alpha \rightarrow \alpha^a$  是  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  的逆映照. 因为折轉映照把  $\mathfrak{A}$  映到它自身內, 所以,  $y \rightarrow h(x_1, y)^a y_1$  与綫性变换  $\sum u_i \times v_i$  重合. 由簡單的論証指出, 我們的变换实质上有  $z_1 \times y_1$  的形状. 所以对于所有  $y$ ,  $h(x_1, y)^a = h(y, z_1)$  成立. 如果两端取上橫綫, 則得  $h(x_1, y) = \overline{h(y, z_1)}$ . 因此对于每个  $x$  有一个  $z$  存在, 使对于所有  $y$ ,  $h(x, y) = \overline{h(y, z)}$  成立. 因为  $h$  的非退化性可推得  $z$  是由  $x$  唯一决定的; 所以  $x \rightarrow z$  是  $\mathfrak{R}$  到它自身內的一个映照  $Q$ ,  $Q$  显然是一个自同态. 再則

$$\begin{aligned}
h(\alpha x, y) &= \alpha h(x, y) = \overline{ah(y, xQ)} \\
&= \overline{h(y, xQ)\alpha^a} = \overline{h(y, a^a(xQ))};
\end{aligned}$$

所以  $(\alpha x)Q = \alpha^{a^2}(xQ)$ , 而  $Q$  是帶有相伴自同构  $a^2$  的半綫性变换.  $h$  的非退化性可推得  $Q$  是 1—1 的. 最后因为  $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$  的每个元素是一个折轉映照, 故  $Q$  是到  $\mathfrak{R}$  上的一个映照. 这証明  $h$  是弱厄米特純量积.

反过来, 設  $h$  是  $\Delta$  上  $\mathfrak{R}$  里一个非退化的弱厄米特純量积. 令  $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$ , 并且令  $A'$  現在表示它关于  $h$  的折轉映照, 則

$$\begin{aligned}
\overline{h(xA', y)} &= h(yQ^{-1}, xA') = h(yQ^{-1}A, x) \\
&= \overline{h(x, yQ^{-1}AQ)}.
\end{aligned}$$

所以  $h(xA', y) = h(x, yQ^{-1}AQ)$ . 这証明  $A' \in \mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$ , 并且

$A'' = Q^{-1}AQ$ . 所以  $A \rightarrow A'$  是  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$  的一个反自同构. 上面的結果可总结如次:

**定理 8** 令  $\mathfrak{A}$  是  $\Delta$  上  $\mathfrak{R}$  里綫性變換的一个稠密環, 它含有有限秩的非零變換. 設  $\mathfrak{A}$  拥有一个反自同构  $A \rightarrow A\Psi$ , 則  $\Delta$  有一个反自同构  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ , 并且  $\mathfrak{R}$  里存在一个非退化的弱厄米特純量積使  $\mathfrak{A}$  夾在  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$  与  $\mathfrak{U}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$  之間, 并且使  $A \rightarrow A\Psi$  与关于  $h$  的折轉映照重合. 反过來, 如果  $\mathfrak{R}$  有一个非退化的弱厄米特純量積, 則  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$  里折轉映照是一个反自同构.

其次, 我們添上条件:  $A \rightarrow A' (= A\Psi)$  是对合的, 亦即对于所有  $A \in \mathfrak{A}$ ,  $A'' = A$  成立. 由上面导出的关系  $A'' = Q^{-1}AQ$ , 这个条件等价于: 对于所有  $A \in \mathfrak{A}$ ,  $Q^{-1}AQ = A$ . 后者能够成立必須而且只須  $Q = \mu I$  是一个純量乘法. 因此  $A \rightarrow A'$  是对合的必須而且只須对于一个固定的  $v (= \bar{\mu})$  及所有  $x, y$ ,

$$(15) \quad h(x, y) = v \overline{h(y, x)}.$$

今将指出, 我們可以适宜的倍数  $s(x, y) = h(x, y)\tau$  代替  $h$ , 这个  $s(x, y)$  是厄米特純量积或是斜厄米特純量积. 首先注意到 (15) 的迭代給出

$$(16) \quad h(x, y) = v \overline{\overline{h(x, y)}v}.$$

如果选取  $x, y$  使  $h(x, y) = 1$ , 則得  $\bar{v} = v^{-1}$ . 如果  $v = -1$ , 則  $h$  是斜厄米特純量积, 没有什么可証了. 如果  $v \neq -1$ , 命  $\tau = (v + 1)^{-1}$ , 并驗証,

$$\tau^{-1}\bar{\tau} = (v + 1)(\bar{v} + 1)^{-1} = (v + 1)(v^{-1} + 1)^{-1} = v.$$

如果  $s(x, y) = h(x, y)\tau$ , 則可驗証  $s$  是一个純量积, 它的反自同构是  $\alpha \rightarrow \alpha^* \equiv \tau^{-1}\bar{\alpha}\tau$ . 还有

$$\begin{aligned} s(y, x)^* &= \tau^{-1}\overline{s(y, x)}\tau = \tau^{-1}\bar{\tau}\overline{h(y, x)}\tau \\ &= v\overline{h(y, x)}\tau = h(x, y)\tau = s(x, y); \end{aligned}$$

所以  $s$  是厄米特純量积. 故証明了下面的定理.

**定理 9** 令  $\mathfrak{A}$  及  $\Psi$  与定理 8 一樣, 并設  $\Psi^2 = 1$ . 則  $\Delta$  有一个对合反自同构, 并且  $\mathfrak{R}$  里存在有一个非退化的厄米特或斜厄米特

純量積  $s$  使  $A \rightarrow A\psi$  与關於  $h$  的折轉映照重合。反过來，如果  $\mathfrak{R}$  有一个非退化的厄米特或斜厄米特純量積，則  $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}|\mathfrak{R})$  里折轉映照是一个反自同构。

还得說明的是：由习题 42 的第 4 題知，我們可設这个純量積是厄米特的或斜称的，只有  $\Delta = \Phi$  是一个域时，后一个可能性才成立。

### 習 題 73

1. 令  $h$  是  $\mathfrak{R}$  里一个非退化的厄米特或斜厄米特純量積。証明：如果  $\Theta$  是  $\mathfrak{R}$  的一个有限維非迷向子空間<sup>1)</sup>，則  $\mathfrak{R} = \Theta \oplus \Theta'$ ，这里  $\Theta'$  是  $\Theta$  的正交余空間。
2. (黎卡特)。令  $U$  是一个綫性变换。如果  $h(xU, yU) = h(x, y)$  对于所有  $x, y \in \mathfrak{R}$  成立，則  $U$  叫做  $h$  单式的綫性变换。单式变换  $I$  使  $I^2 = 1$ ，則叫做一个对合。設  $\Delta$  的特征数  $\neq 2$ ，証明：如果  $I$  是一个对合，則存在有一个分解  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_+ \oplus \mathfrak{R}_-$ ，这里  $\mathfrak{R}_+$  及  $\mathfrak{R}_-$  都是非迷向的及正交的，并且对于  $x \in \mathfrak{R}_+$ ， $xi = x$ ，而对于  $x \in \mathfrak{R}_-$ ， $xi = -x$ 。

**13. 叔尔引理. 一般稠密性定理** 关于綫性变换的稠密环得到的結果，它們的应用范围很广泛。今将指出，这些結果应用于自同态的任意不可約环。这因为我們將証明：綫性变换的稠密环与自同态的不可約环这两个概念是完全等价的。我們已知綫性变换的每个稠密环是自同态的一个不可約集合；所以剩下的是証明逆定理。

故設  $\mathfrak{U}$  是交換羣  $\mathfrak{R}$  的自同态的一个不可約环，我們第一步驟是引入一个可除环  $\Delta$ ；关于  $\Delta$ ， $\mathfrak{R}$  是一个向量空間而  $\mathfrak{U}$  是綫性变换的一个集合，因为有下列的基本引理，故可取这个步驟。

**叔尔引理** 如果  $\mathfrak{U}$  是交換羣  $\mathfrak{R}$  里自同态的一个不可約環，則与每个  $A \in \mathfrak{U}$  可交換的自同态的環  $\mathfrak{B}$  是一个可除環。

**証** 令  $B$  是  $\mathfrak{B}$  里任意非零元素，則象羣  $\mathfrak{R}B$  关于  $\mathfrak{U}$  是不变的。这可由  $B$  与  $\mathfrak{U}$  的元素的可交換性直接推出。因为  $\mathfrak{R}B \neq 0$ ， $\mathfrak{U}$  的不可約性可推得  $\mathfrak{R}B = \mathfrak{R}$ 。次令  $\mathfrak{R}$  是自同态  $B$  的核。我們又可驗證  $\mathfrak{R}$  是一个  $\mathfrak{U}$ -子羣。又因为  $B \neq 0$ ， $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}$ ，所以， $\mathfrak{R} = 0$ 。这

1) 如果  $\Theta \cap \Theta' = 0$ ，則  $\Theta$  是非迷向的。參看第五章，§ 7。

意味着  $B$  是 1-1 的, 故知  $B$  是  $\mathfrak{R}$  (在它自身上) 的一个自同构, 逆映照  $B^{-1}$  也是一个自同态, 显然  $B^{-1}$  与每个  $A \in \mathfrak{A}$  可交换, 所以  $B^{-1} \in \mathfrak{B}$ , 故我們已証得:  $\mathfrak{B}$  的每个  $B \neq 0$  在  $\mathfrak{B}$  里有一个逆映照, 故  $\mathfrak{B}$  是一个除环.

因为自同态的环  $\mathfrak{B}$  是一个除环含有恆等自同态, 羣  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{B}$  合起来构成一个右向量空間, 这里純量积  $xB (x \in \mathfrak{R}, B \in \mathfrak{B})$  只是  $x$  在  $B$  下的象. 为着与前面強調左向量空間一致起見, 今将把  $\mathfrak{R}$  看作一个左向量空間, 令  $\Delta$  表示与  $\mathfrak{B}$  反同构的一个除环. 如果  $\beta \mapsto B$  是  $\Delta$  到  $\mathfrak{B}$  上的一个一定的反同构, 积  $\beta x = xB$  轉移  $\mathfrak{R}$  为  $\Delta$  上一个左向量空間, 显然  $\mathfrak{A}$  的元素是  $\Delta$  上  $\mathfrak{R}$  里 (或  $\mathfrak{B}$  上  $\mathfrak{R}$  里) 的綫性变换, 我們还知道, 与每个  $A \in \mathfrak{A}$  可交换的自同态只是純量乘法.

由現在起, 假定  $\mathfrak{A} \neq 0$ . 如果  $\mathfrak{R}$  表示对于所有  $A$  能使  $xA = 0$  的  $x$  的集合, 則  $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}$ , 但  $\mathfrak{R}$  关于  $\mathfrak{A}$  是一个不变子羣, 所以  $\mathfrak{R} = 0$ . 这个結果意味着: 如果  $x$  是任意非零向量, 則有一个  $A \in \mathfrak{A}$  存在使  $xA \neq 0$ . 再則固定向量  $x$  的象  $xA$  的集合  $x\mathfrak{A}$  显然是一个  $\mathfrak{A}$ -子羣, 又由  $\mathfrak{A}$  的不可約性推得  $x\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ , 所以, 如果  $x \neq 0$  及  $y$  是任意向量, 則存在有一个  $A \in \mathfrak{A}$  使  $xA = y$ . 故証得  $\mathfrak{A}$  是 1-重传递的, 它的定义如次:

設  $\mathfrak{A}$  是  $\mathfrak{R}$  里綫性变换的一个集合, 如果給定  $l (\leq k)$  个向量的任意两个有序集合  $(x_1, x_2, \dots, x_l), (y_1, y_2, \dots, y_l)$ , 其中  $x_i$  是綫性无关的, 則  $\mathfrak{A}$  里有一个  $A$  存在使  $x_i A = y_i (i = 1, 2, \dots, l)$  时, 集合  $\mathfrak{A}$  叫做  $k$ -重传递集合.

我們繼續作自同态的不可約集合的分析, 而証  $\mathfrak{A}$  是 2-重传递集合. 現在我們將使用下面的事实: 純量乘法是能与  $\mathfrak{A}$  里所有  $A$  可交换的仅有自同态, 作为証明的准备, 我們注意到: 如果 1)  $\mathfrak{A}$  是 1-重传递的, 及 2) 如果  $(x_1, x_2, \dots, x_l)$  是  $l (\leq k)$  个綫性无关向量, 則对于  $i = 1, 2, \dots, l$ ,  $\mathfrak{A}$  里存在有一个綫性变换  $E_i$  使

$$x_j E_i = 0 \quad (j \neq i), \quad \text{而} \quad x_i E_i \neq 0,$$

則綫性变换的环是  $k$ -重传递的. 这因为, 如果  $E_i (i = 1, 2, \dots,$

1) 存在, 則可在  $\mathfrak{U}$  里找到一個  $B_i$  使  $x_i E_i B_i = y_i$ . 于是,  $A = \sum E_i B_i$  具有所需要的性質  $x_i A = y_i (i = 1, 2, \dots, l)$ . 今取  $l = 2$ , 并且相反地假設  $\mathfrak{U}$  里沒有  $E$  使  $x_1 E = 0$ , 但  $x_2 E \neq 0$ . 如果  $B$  是  $\mathfrak{U}$  的任意元素使  $x_1 B = 0$ , 則也有  $x_2 B = 0$ . 这个事实可推得对应  $x_1 A \rightarrow x_2 A$  是单值的, 这里  $A$  在  $\mathfrak{U}$  里变动. 这因为, 如果  $x_1 A = x_1 A'$ , 而  $A$  与  $A'$  属于  $\mathfrak{U}$ , 則对于  $B = A - A'$  有  $x_1 B = 0$ . 所以,  $0 = x_2 B = x_2(A - A')$  而  $x_2 A = x_2 A'$ . 今知象  $x_1 \mathfrak{U}$  的集合是整个空間  $\mathfrak{R}$ . 显然这个映照也是一个同态. 所以它是  $\mathfrak{R}$  的一个自同态. 如果  $C$  是  $\mathfrak{U}$  里任意綫性变换, 則

$$(x_1 A)C = x_1 AC \rightarrow x_2 AC = (x_2 A)C,$$

而这指出映照  $x_1 A \rightarrow x_2 A$  与  $C$  可交换. 故这个映照是一个純量乘法, 亦即存在有一个  $\beta \in \Delta$  使对于所有  $A$ ,  $x_2 A = \beta(x_1 A)$  成立. 故对于所有  $A$ ,  $(x_2 - \beta x_1)A = 0$ . 于是,  $x_2 = \beta x_1$ ; 这与  $x_1$  及  $x_2$  的綫性无关性矛盾.

我們最后的步骤是指出:  $\mathfrak{U}$  在  $\mathfrak{R}$  里是稠密的; 或換句話說,  $\mathfrak{U}$  对于所有  $k$  是  $k$ -重传递的. 事实上我們將提高一步証明, 亦即証明: 綫性变换的任意 2-重传递环是稠密的. 設  $\mathfrak{U}$  有这个性質, 并假定我們已知对于一个特殊  $k$ ,  $\mathfrak{U}$  是  $k$ -重传递的. 如果我們能証明: 如果  $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$  是綫性无关向量, 則  $\mathfrak{U}$  里存在一个变换  $F$  使  $i \leq k$  时  $x_i F = 0$ , 但  $x_{k+1} F \neq 0$ , 則这个結果可由归納法得出. 由归納法假設知,  $\mathfrak{U}$  里存在有  $E_i$  使

$$x_i E_j = \delta_{ij} x_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, k).$$

命  $E = \sum_1^k E_i$ , 并先考虑  $x_{k+1} E \neq x_{k+1}$  的情形, 則  $x_{k+1} E - x_{k+1} \neq 0$ , 而在  $\mathfrak{U}$  里存在一个  $A$  使  $(x_{k+1} E - x_{k+1})A \neq 0$ . 如果  $F = EA - A$ , 則

$$x_{k+1} F = x_{k+1}(EA - A) = (x_{k+1} E - x_{k+1})A \neq 0.$$

另一方面,  $i \leq k$  时,  $x_i E = x_i$ . 所以  $x_i EA = x_i A$  而  $x_i F = 0$ . 次設  $x_{k+1} E = x_{k+1}$ , 則可断言有一个  $i \leq k$  存在使  $x_{k+1} E_i, x_i$  是綫性无关的; 这因为, 否則  $x_{k+1} E_i = \beta_i x_i$  而



$$x_{k+1} = x_{k+1}E = \sum x_{k+1}E_i = \sum \beta_i x_i,$$

这与  $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$  的綫性无关性矛盾。今令  $x_{k+1}E_i$  与  $x_i$  对于一个特殊的  $i$  是綫性无关的, 因为  $\mathfrak{A}$  是 2-重传递的, 則有一个  $B \in \mathfrak{A}$  存在使  $x_{k+1}E_i B \neq 0$ , 但  $x_i B = 0$ 。如果命  $F = E_i B$ , 則得  $j \neq i$  而  $\leq k$  时  $x_j F = x_j E_i B = 0$ , 并且  $x_i F = 0$ , 但  $x_{k+1} F \neq 0$ 。这証明了这个断言, 并且完成了下面定理的証明。

**一般稠密性定理** 令  $\mathfrak{A}$  是交換羣  $\mathfrak{R}$  里非零自同态的任意不可約環, 并且把  $\mathfrak{R}$  看作一个除环  $\Delta$  上的一个左向量空間, 与每个  $A \in \mathfrak{A}$  可交換的自同态的除环成反同构, 則  $\mathfrak{A}$  是  $\Delta$  上  $\mathfrak{R}$  里綫性變換的一个稠密環。

**14. 綫性變換的不可約代数** 前节定理也可应用于綫性變換的不可約代数, 并在这个形状下它們給出羣表示論上若干基本的結果, 今来导出这些結果。因此我們由域  $\Phi$  上一个向量空間  $\mathfrak{R}$  及  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}$  里綫性變換的一个代数  $\mathfrak{A}$  开端。  $\mathfrak{A}$  是一个代数的假定意味着  $\mathfrak{A}$  在加法及乘法合成及用  $\Phi$  的元素作的乘法 (或  $\Phi_i$ ) 下是封閉的。

今設  $\mathfrak{A}$  作为綫性變換的一个集合是不可約的<sup>1)</sup>, 故可假定  $\mathfrak{R}$  的子空間关于  $\mathfrak{A}$  是不变的只有  $\mathfrak{R}$  及 0, 或等价地說, 集合  $(\mathfrak{A}, \Phi_i)$  是自同态的一个不可約集合。今将指出: 如果  $\mathfrak{A} \neq 0$ , 則  $\mathfrak{A}$  自身作为自同态的一个集合是不可約的。要証这一点, 令  $x$  是  $\mathfrak{R}$  里任意非零向量, 考虑向量  $xA$  的集合  $x\mathfrak{A}$ 。因为  $\mathfrak{A}$  是一个代数,  $x\mathfrak{A}$  是一个子空間, 显然  $x\mathfrak{A}$  也是  $\mathfrak{A}$ -不变的。所以,  $x\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ , 或  $x\mathfrak{A} = 0$ 。如果  $x\mathfrak{A} = 0$  成立, 則使  $z\mathfrak{A} = 0$  的向量  $z$  的集合  $\mathfrak{N}$  含有非零向量。显然  $\mathfrak{N}$  是一个子空間, 并且  $\mathfrak{N}$  也是  $\mathfrak{A}$ -不变的。所以  $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}$ , 而  $\mathfrak{A} = 0$ , 这与假設矛盾。故得对于任意非零的  $x$ ,  $x\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ , 并且这可直接推得  $\mathfrak{A}$  是自同态的一个不可約集合。

至此可使用前节的結果了, 为着这个目的, 考虑与每个  $A \in \mathfrak{A}$  可交換的自同态的环  $\mathfrak{B}$ 。显然  $\mathfrak{B} \supseteq \Phi_i$ 。其次观察到:  $\mathfrak{B}$  的元素是

1) 參看第四章, §1。

綫性變換。這因為，令  $\alpha_i \in \Phi_i$ ,  $B \in \mathfrak{B}$ , 則對於任意  $A \in \mathfrak{A}$ , 有

$$\begin{aligned} 0 &= B(\alpha_i A) - (\alpha_i A)B = (B\alpha_i)A - \alpha_i(AB) \\ &= (B\alpha_i)A - \alpha_i(BA) = (B\alpha_i)A - (\alpha_i B)A \\ &= (B\alpha_i - \alpha_i B)A. \end{aligned}$$

所以，如果  $B\alpha_i - \alpha_i B \neq 0$ , 則可求得一個向量  $x$  使  $y = x(B\alpha_i - \alpha_i B) \neq 0$ . 於是，對於所有  $A$ ,  $yA = 0$ , 這與  $\mathfrak{A}$  的不可約性矛盾，故對於每個  $\alpha_i$ ,  $B\alpha_i = \alpha_i B$ , 而  $B$  是一個綫性變換，故可証  $\mathfrak{B}$  也是與  $\mathfrak{A}$  的元素可交換的綫性變換的全体。顯然  $\mathfrak{B}$  是綫性變換的一個代數。由叔爾引理知， $\mathfrak{B}$  是一個可除代數。

今依前節的程序，並引入與  $\mathfrak{B}$  反同構的可除代數  $\Delta$ 。因為  $\mathfrak{B}$  含有  $\Phi_i$ , 我們可設  $\Delta \supseteq \Phi$ 。我們還易知： $\mathfrak{A}$  可依下面方式看作  $\Delta$  上一個左向量空間；用子集合  $\Phi$  的元素所作純量乘法是原來的純量乘法。於是，主要的稠密性定理表明： $\mathfrak{A}$  是  $\Delta$  上  $\mathfrak{A}$  里的綫性變換的一個稠密集合。

今將把這個結果特殊化以得出關於綫性變換的代數上若干古典定理。假定  $\Phi$  是代數閉域，而  $\mathfrak{A}$  是  $\Phi$  上有限維空間。令  $\mathfrak{A}$  是  $\Phi$  上  $\mathfrak{A}$  里綫性變換的一個不可約代數。令  $B$  是與  $\mathfrak{A}$  的每個元素可交換的一個綫性變換，則  $B$  是與不可約集合  $(\mathfrak{A}, \Phi_i)$  里每個元素可交換的一個自同態。所以由叔爾引理知，或者  $B$  是 0，或者  $B$  是滿秩變換。今令  $\rho$  是  $B$  的特征多項式的一個根，則  $C = B - \rho I$  與每個  $A \in \mathfrak{A}$  可交換，但  $\det C = 0$ , 故  $C$  是降秩的。於是， $C = 0$ , 而  $B = \rho I$ 。所以，我們証明了與每個  $A \in \mathfrak{A}$  可交換的綫性變換只是純量乘法。對於綫性變換的不可約集合也可建立同樣的結果。譬如，如果  $\mathcal{Q}$  是這樣一個集合，則  $\mathcal{Q}$  的封裹代數<sup>1)</sup>  $\mathfrak{A}$  是綫性變換的一個不可約代數。再則，如果  $B$  是與每個  $A \in \mathcal{Q}$  可交換的一個綫性變換，則  $B$  與每個  $A \in \mathfrak{A}$  可交換。於是，我們可述下面的定理，它是叔爾引理的最有用的特殊情形中的一個。

**定理 10.** 令  $\mathcal{Q}$  是代數閉域上有限維向量空間  $\mathfrak{A}$  里綫性變換

1) 參看第四章, §6.

的一个不可约集合, 则与每个  $A \in \mathcal{Q}$  可交换的线性变换只有纯量乘法.

这个结果及稠密性定理的一个直接推论是:

**勃恩赛得定理** 如果  $\mathfrak{U}$  是代数闭域上一个有限维向量空间里线性变换的一个非零不可约代数, 则  $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ , 这里  $\mathfrak{E}$  是线性变换的完全代数.

**证** 由定理 10 知, 与  $A \in \mathfrak{U}$  可交换的线性变换的可除代数是  $\Phi_A$ . 所以由稠密性定理知,  $\mathfrak{U}$  是  $\Phi$  上  $\mathfrak{R}$  里的线性变换的一个稠密集合. 因为  $\mathfrak{R}$  有  $\Phi$  上一个有限基, 这可推得  $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ .

## 汉英名词对照表

### 二 划

二次形式(quadratic form), 135

### 三 划

子式(minor), 20

三角形不等式(triangle inequality), 157

上界(upper bound), 215

### 四 划

反自同构(anti-isomorphism)

对合的 $\sim$ (involutional $\sim$ ), 133

元素(element)

$\sim$ 的长度(length of  $\sim$ ), 73

$\sim$ 的度数(degree of  $\sim$ ), 72

有限阶 $\sim$ ( $\sim$  of finite order), 75

主同势 $\sim$ (principal idempotent  $\sim$ ), 117

主无势 $\sim$ (principal nilpotent  $\sim$ ), 117

极大 $\sim$ (maximal  $\sim$ ), 215

双线性形式(bilinear form), 122

非退化的 $\sim$ (non-degenerate  $\sim$ ), 125  
228

### 五 划

包含关系(relation of inclusion), 23

生成(to generate), 60

对应(correspondence)

反序 $\sim$ (reversing  $\sim$ ), 19

对称算子(symmetry operator), 195

对称类(symmetry class), 195

对偶原理(principle of duality), 48

主理想整区(principal ideal domain), 67

可数序列(denumerable sequence), 222

代数(algebra)

域 $\Phi$ 上 $\sim$ ( $\sim$  over the field  $\Phi$ ), 或超复  
数系(hypercomplex numbers), 32

线性变换的 $\sim$ ( $\sim$  of linear transfor-  
mations), 32

封装 $\sim$ (enveloping  $\sim$ ), 113

自由(结合) $\sim$ (free (associative)  $\sim$ ),  
188

格拉斯曼 $\sim$ (Grassmann  $\sim$ ) 或外 $\sim$   
(exterior  $\sim$ ), 189

线性变换的不可约 $\sim$ (irreducible  $\sim$  of  
linear transformations), 247

代数闭域(algebraical closed field), 86

正交完全可约性(orthogonal complete  
reducibility), 158

### 六 划

行列式(determinant)

范德蒙得 $\sim$ (Vandermonde $\sim$ ), 22

多项式(polyomial)

最低 $\sim$ (minimum  $\sim$ ), 59

线性变换的 $\sim$ ( $\sim$  of linear transfor-  
mation), 59

阵的 $\sim$ ( $\sim$  of matrix), 58

指导 $\sim$ (order of vector  $\sim$ ), 60

特征 $\sim$ (characteristic  $\sim$ ), 87, 89

自然映照(natural mapping), 104

扩张(extension)

基域的 $\sim$ ( $\sim$  of base field), 198

映照的 $\sim$ ( $\sim$  of mapping), 198

同构(isomorphism)

0- $\sim$ (0- $\sim$ ), 或等价(equivalence), 7

相伴 $\sim$ (associated  $\sim$ ), 212

算子 $\sim$ (operator  $\sim$ ), 238

合成空間列(composition series), 107  
 合成因子(composition factor), 107  
 向量(vector), 2, 4  
 綫性相关的 $\sim$ (linearly dependent $\sim$ ), 9  
 綫性无关的 $\sim$ (linearly independent $\sim$ ), 9  
 行 $\sim$ (row $\sim$ ), 19  
 列 $\sim$ (column $\sim$ ), 20  
 特征 $\sim$ (characteristic $\sim$ ), 88, 167  
 正交 $\sim$ (orthogonal $\sim$ s), 134  
 迷向 $\sim$ (isotropic $\sim$ ), 134  
 关联 $\sim$ (incident $\sim$ s), 228  
 收斂(to converge), 173, 174  
 多綫性函数(multilinear function), 189

## 七 划

初等因子(elementary divisor), 64, 83  
 判断准则(criterion), 110

## 八 划

和(sum), 1, 2, 174  
 直接 $\sim$ (direct $\sim$ ), 27, 188  
 子模的 $\sim$ ( $\sim$  of submodules), 76  
 空間(space)  
 向量 $\sim$ (vector $\sim$ )  
 $\Delta$ 上 $n$ 维组的 $\sim$ ( $\sim$  of  $n$ -tuple $\sim$  over  $\Delta$ ), 2  
 有限維抽象 $\sim$ (finite dimensional abstract $\sim$ ), 2, 3  
 右 $\sim$ (right $\sim$ ), 5  
 双侧 $\sim$ (two-sided $\sim$ ), 182  
 $\sim$ 的积群(product group of $\sim$ ), 178  
 余 $\sim$ (complement $\sim$ ), 25  
 正交 $\sim$ (orthogonal $\sim$ ), 134  
 商 $\sim$ (factor $\sim$ ), 22  
 循环 $\sim$ (cyclic $\sim$ ), 61  
 子 $\sim$ (subspace $\sim$ ), 4  
 无关 $\sim$ (independent $\sim$ s), 25  
 与 $\mathfrak{R}$ 的子空間 $\mathfrak{S}$ 关联的 $\mathfrak{R}^*$ 的 $\sim$ ( $\sim$  of  $\mathfrak{R}^*$  incident with the subspace  $\mathfrak{S}$  of  $\mathfrak{R}$ ), 49

不变 $\sim$ (invariant $\sim$ ), 59, 102  
 循环 $\sim$ (cyclic $\sim$ ), 60  
 $\Omega$ -同构的 $\sim$ ( $\Omega$ -isomorphic $\sim$ )或 $\Omega$ -等价的 $\sim$ ( $\Omega$ -equivalent $\sim$ ), 113  
 $g$ -等价的 $\sim$ ( $g$ -equivalent $\sim$ ), 133  
 迷向 $\sim$ (isotropic $\sim$ ), 134  
 全 $\sim$ (totally $\sim$ ), 134  
 非迷向的 $\sim$ (non-isotropic $\sim$ ), 244  
 全 $\sim$ (total $\sim$ ), 225  
 秩 $\sim$ (rank $\sim$ ), 39  
 零 $\sim$ (null $\sim$ ), 40, 231  
 共轭 $\sim$ (conjugate $\sim$ ), 46  
 关于綫性变换集合的不可約 $\sim$ (irreducible $\sim$  relative to the set of linear transformations), 103  
 关于綫性变换集合的可分解的 $\sim$ (decomposable $\sim$  relative to the set of linear transformations), 108  
 支 $\sim$ (component $\sim$ ), 115  
 primary $\sim$ (primary $\sim$ ), 117  
 对偶 $\sim$ (dual $\sim$ s), 125, 227  
 关联 $\sim$ (incident $\sim$ ), 126  
 根 $\sim$ (radical $\sim$ ), 134  
 欧几里得 $\sim$ (Euclidean $\sim$ ), 154  
 特征 $\sim$ (characteristic $\sim$ ), 163  
 等价 $\sim$ (equivalent $\sim$ ), 184  
 建立于空間 $\mathfrak{R}$ 上的张量 $\sim$ (tensor $\sim$  based on the space  $\mathfrak{R}$ ), 191  
 拓扑 $\sim$ (topological $\sim$ ), 223  
 离散的 $\sim$ (discrete $\sim$ ), 223  
 全不連通 $\sim$ (totally disconnected $\sim$ ), 225  
 $\sim$ 的真分解(proper decomposition of $\sim$ ), 108  
 环(ring)  
 封套 $\sim$ (enveloping $\sim$ ), 113  
 单纯 $\sim$ (simple $\sim$ ), 204  
 稠密 $\sim$ (dense $\sim$ ), 233  
 $\sim$ 类(class of $\sim$ ), 233  
 叙密特正交化法(Schmidt's orthogonalization), 155  
 定向(orientation)  
 同 $\sim$ (same $\sim$ ), 156  
 反 $\sim$ (opposite $\sim$ ), 156

阿列夫零(Aleph zero), 220

拓扑(topology), 223

离散的 $\sim$ (discrete  $\sim$ ), 22

有限 $\sim$ (finite  $\sim$ ), 223

拓扑群(拓扑 $\sim$ ), 228

$\sim$ 群(topological group), 224

$\sim$ 环(topological ring), 224

$\sim$ 化(topologize), 223

邻域(neighborhood), 224

单纯性(simplicity), 203

## 九 划

变换(transformation)

线性 $\sim$ (linear  $\sim$ ), 28, 44, 184

循环 $\sim$ (cyclic  $\sim$ )或非退化 $\sim$ (non-derogatory  $\sim$ ), 61

$\sim$ 的不可约集合(irreducible set of  $\sim$ ), 103

无势 $\sim$ (nilpotent  $\sim$ ), 34

转置 $\sim$ (transpose), 50, 126, 236

初等 $\sim$ (elementary  $\sim$ ), 72

诱导 $\sim$ (induced  $\sim$ ), 104, 192

$\Omega$ - $\sim$ ( $\Omega$ - $\sim$ ), 112

$g$ -单式 $\sim$ ( $g$ -unitary  $\sim$ ), 147

耦对 $\sim$ 或辛 $\sim$ (symplectic  $\sim$ ), 151

对称 $\sim$ (symmetric  $\sim$ ), 159

斜称 $\sim$ (skew symmetric  $\sim$ ), 159, 195

正交 $\sim$ (orthogonal  $\sim$ ), 159

旋转 $\sim$ (rotation), 160

正规 $\sim$ (normal  $\sim$ ), 165, 171

正定 $\sim$ (positive definite  $\sim$ ), 166

半定 $\sim$ (semi-definite  $\sim$ ), 166

单式 $\sim$ (unitary  $\sim$ ), 171

$h$ - $\sim$ ( $h$ - $\sim$ ), 244

厄米特 $\sim$ (Hermitian  $\sim$ ), 170

正定的 $\sim$ (positive definite  $\sim$ ), 172

半定的 $\sim$ (semi-definite  $\sim$ ), 172

斜厄米特 $\sim$ (skew hermitian  $\sim$ ), 170

对角线性 $\sim$ (diagonal linear  $\sim$ ), 225

半线性 $\sim$ (semi-linear  $\sim$ ), 233

$\sim$ 的转置(transpose of  $\sim$ ), 239

对合 $\sim$ (involution  $\sim$ )

$\sim$ 的可分解集合(decomposable set

of  $\sim$ s), 108

$\sim$ 的完全可约集合(completely reducible set of  $\sim$ s), 112

$\sim$ 的对称部分(symmetric part of  $\sim$ ), 165

$\sim$ 的斜称部分(skew part of  $\sim$ ), 165

$\sim$ 的极因子分解(polar factorization of  $\sim$ ), 168

威特符号差(Witt signature), 151

## 十 划

积(product), 1

阵的 $\sim$ ( $\sim$  of matrices), 14

纯量 $\sim$ (scalar  $\sim$ ), 132

厄米特 $\sim$ (Hermitian  $\sim$ ), 133

弱 $\sim$ (weakly  $\sim$ ), 242

斜厄米特 $\sim$ (skew Hermitian  $\sim$ ), 135

对称 $\sim$ (symmetrical  $\sim$ ), 137

斜称 $\sim$ (skew symmetrical  $\sim$ ), 142

交错 $\sim$ (alternate  $\sim$ ), 142

非退化的 $\sim$ (non-degenerate  $\sim$ ), 134

汎 $\sim$ (universal  $\sim$ ), 137

直接 $\sim$ (direct  $\sim$ ), 180, 181, 185, 202

克伦内克 $\sim$ (Kronecker  $\sim$ ), 186, 189, 190, 202, 227

乘法(multiplication)

左 $\sim$ (left  $\sim$ ), 2

右 $\sim$ (right  $\sim$ ), 2

纯量 $\sim$ (scalar  $\sim$ ), 29

纯量(scalar), 4

秩(rank)

集合的 $\sim$ ( $\sim$  of set), 19

行 $\sim$ (row  $\sim$ ), 19

列 $\sim$ (column  $\sim$ ), 20

行列式 $\sim$ (determinantal  $\sim$ ), 19

变换的 $\sim$ ( $\sim$  of transformation), 39, 231

阵(matrix), 13

单位 $\sim$ (unit  $\sim$ ), 15

满秩 $\sim$ (non-singular  $\sim$ )或正则 $\sim$ (regular  $\sim$ ), 15

I, II 及 III 型初等 $\sim$ (elementary  $\sim$  of

types I, II and III), 18  
 $A$  关于有序基的  $\sim$  ( $\sim$  of  $A$  relative to the ordered bases), 43, 44  
 等价  $\sim$  (equivalent  $\sim$ ) 或相伴  $\sim$  (Associates  $\sim$ ), 37, 72  
 相似  $\sim$  (similar matrices  $\sim$ ), 38  
 增广  $\sim$  (augmented  $\sim$ ), 43  
 友  $\sim$  (companion  $\sim$ ), 62  
 约当典型  $\sim$  (Jordan canonical  $\sim$ ), 62, 82  
 古典典型  $\sim$  (classical canonical  $\sim$ ), 65, 83  
 初等  $\sim$  (elementary  $\sim$ ), 72  
 正规化  $\sim$  (normalized  $\sim$ ), 98  
 双线性形式关于给定基的  $\sim$  ( $\sim$  of the bilinear form relative to given bases), 123  
 纯量积的  $\sim$  ( $\sim$  of scalar product), 132  
 共轭转置  $\sim$  (conjugate transpose  $\sim$ ), 132  
 同步  $\sim$  (cogredient matrices  $\sim$ ), 132  
 厄米特  $\sim$  (Hermitian  $\sim$ ), 134  
 厄米特纯量积的  $\sim$  ( $\sim$  of Hermitian scalar product), 135  
 交错  $\sim$  (alternate  $\sim$ ), 143  
 正交  $\sim$  (orthogonal  $\sim$ ), 156  
     真  $\sim$  (proper  $\sim$ ), 156  
     假  $\sim$  (improper  $\sim$ ), 156  
 正规  $\sim$  (normal  $\sim$ ), 165  
 单式  $\sim$  (unitary  $\sim$ ), 170  
 极限  $\sim$  (limit  $\sim$ ), 173  
 第  $r$  复合  $\sim$  ( $r$ th compound  $\sim$ ), 196  
 半线性变换的  $\sim$  ( $\sim$  of semi-linear transformation), 212  
 行有限  $\sim$  (row finite  $\sim$ ), 219  
 列有限  $\sim$  (column finite  $\sim$ ), 225  
 $\Delta$  上  $I \times J \sim$  ( $I \times J \sim$  over  $\Delta$ ), 219  
 积  $\sim$  (product  $\sim$ ), 219  
 $\sim$  的范式 (normal form for a  $\sim$ ), 74  
 $\sim$  的不变因子 (invariant factors of a  $\sim$ ), 74  
 $\sim$  的迹 ( $\sim$  trace), 87

$\sim$  集合 (set of matrices), 102  
 线性变换集合关于一个基的  $\sim$  ( $\sim$  of set of linear transformations relative to a basis), 102  
 $\sim$  的既约形式 (reduced form), 103  
 $\sim$  的符号差 (signature of  $\sim$ ) 或惯性指数 (inertial index), 140  
 格 (lattice), 23  
 子空间的  $\sim$  ( $\sim$  of subspaces), 23  
 模  $\sim$  (modular  $\sim$ ) 或狄得京得  $\sim$  (Dedekind  $\sim$ ), 24  
 有余  $\sim$  (complemented  $\sim$ ), 24  
 闭包 (closure), 224  
 空 (nullity), 40, 231  
 射影 (projection), 54  
 特征根 (characteristic root), 92  
 根集 (radical)  
     左  $\sim$  (left  $\sim$ ), 124  
     右  $\sim$  (right  $\sim$ ), 124

## 十 一 划

基 (basis), 215, 223  
 自由模的  $\sim$  ( $\sim$  of a free module), 7  
 余  $\sim$  (complementary  $\sim$ ), 47, 126  
 空  $\sim$  (vacuous  $\sim$ ), 68  
 笛卡儿  $\sim$  (Cartesian  $\sim$ ), 154  
 单式  $\sim$  (unitary  $\sim$ ), 170  
 连带  $\sim$  (associated  $\sim$ ), 190  
 诺德  $\sim$  (Noether  $\sim$ ), 218  
 基数 (cardinal number  $\sim$ ), 214  
 理想 (ideal)  
     阶  $\sim$  (order  $\sim$ ), 75  
     初等因子  $\sim$  (elementary divisor  $\sim$ ), 83  
     右  $\sim$  (right  $\sim$ ), 206, 208  
         极小  $\sim$  (minimal  $\sim$ ), 207  
         极大  $\sim$  (maximal  $\sim$ ), 207  
     左  $\sim$  (left  $\sim$ )  
         极小  $\sim$  (minimal  $\sim$ ), 207  
         极大  $\sim$  (maximal  $\sim$ ), 207  
 双侧  $\sim$  (two-sided  $\sim$ ), 232  
     极小  $\sim$  (minimal  $\sim$ ), 207  
     极大  $\sim$  (maximal  $\sim$ ), 207

張量(tensor), 191

$r$  秩逆變及  $s$  秩協變的  $\sim$  ( $\sim$  which is contravariant of rank  $r$  and covariant of rank  $s$ ), 191

對稱  $\sim$  (symmetric  $\sim$ ), 194

斜稱  $\sim$  (skew symmetric  $\sim$ ), 195

$\sim$  的對稱類(symmetry classes of  $\sim$ s), 194

## 十二划

聯合(join), 23

集合(set, collection)

偏序  $\sim$  (partially ordered  $\sim$ ), 23

正交射影  $\sim$  ( $\sim$  of orthogonal projections), 54

補  $\sim$  (supplementary  $\sim$ ), 54

綫性無關  $\sim$  (linearly independent  $\sim$ ), 215

綫性有序  $\sim$  (linearly ordered  $\sim$ ) 或鏈(chain), 215

開  $\sim$  (open  $\sim$ ), 223

閉  $\sim$  (closed  $\sim$ ), 224

稠密的  $\sim$  (dense  $\sim$ ), 226

余  $\sim$  (complementary  $\sim$ ), 226

自同態的不可約  $\sim$  (irreducible  $\sim$  of endomorphism), 233

$k$ -重傳遞  $\sim$  ( $k$ -fold transitive  $\sim$ ), 245

強無關  $\sim$  (strongly independent collection), 221

短縮(contraction), 49, 192

$K_j^r$  對於第  $k$  個逆變指標及第  $l$  個協變指標的  $\sim$  ( $\sim$  of  $K_j^r$  with respect to the  $k+l$  contravariant index and the  $l+k$  covariant index), 193

## 十三划

羣(group)

全體綫性  $\sim$  (full linear  $\sim$ ), 41

單式子  $\sim$  (unitary subgroup), 170

積  $\sim$  (product  $\sim$ ), 178

零化(to annihilate), 209

稠密性(density), 247

## 十四划

維數(dimensionality), 8, 12, 217

## 十五划

模(module)

$\Sigma$ - $\sim$  ( $\Sigma$ - $\sim$ ), 6

左  $\sim$  (left  $\sim$ ), 6

右  $\sim$  (right  $\sim$ ), 6

子  $\sim$  (sub- $\sim$ ), 6

由集合  $S$  生成的  $\sim$  ( $\sim$  generated by the set  $S$ ), 7

循環  $\sim$  (cyclic  $\sim$ ), 75

$\sim$  的長度(length of  $\sim$ ), 79

有限生成  $\sim$  (finitely generated  $\sim$ ), 7

自由  $\sim$  (free  $\sim$ ), 7

$\sim$  的維數 (dimensionality of the  $\sim$ ), 79

$\Sigma$ -自同構  $\sim$  ( $\Sigma$ -automorphic  $\sim$ ) 或等價  $\sim$  (equivalent  $\sim$ ), 7

循環  $\sim$  (cyclic  $\sim$ ), 75

綫性函數(linear function), 29, 45

綫性方程組 (system of linear equations), 42

左手  $\sim$  (left-handed  $\sim$ )

## 十八划

鏈條件(chain conditions), 25



## 人 名 索 引

### 2—5 划

几尔桑斯, Erdős, P. 221  
卡浦兰斯基, Kaplansky, I. 244, 221  
厄米特, Hermite, C. 121, 133, 134  
汉米頓, Hamilton, W. R., 56, 88, 89  
弗兰得斯, Flanders 94

### 6—10 划

印格拉罕, Ingraham, M. H., 120  
米勒斯, Mills, W. H. i  
西尔平斯基, Sierpinski, W. 217, 220  
伽罗华, Galois, E. 199  
克里福得, Clifford, A. H. i  
克伦内克, Kronecker, L. 186, 189, 202, 227  
克鲁尔, Krull, W. 56, 113  
佐恩, Zorn, M. 214, 215  
狄佑当纳, Dieudonne, J. 149, 152  
狄得京得, Dedekind, R. 24  
李托夫, Litoff 237  
欧几里得, Euclid 154  
帕勒, Pall, G. 144  
拉格兰日, Lagrange, J. L. 137, 155  
叔尔, Schur, I. 120, 244  
叔密特, Schmidt, E. 113, 155

威得朋, Wedderburn, J. H. M. 197  
威尔, Weyl, H. 197  
威特, Witt, E. 144, 155  
柏克霍夫, Birkhoff, G. 215  
伯恩斯坦, Bernstein, F. 217  
洛尉, Löwig, H. 216  
勃恩赛得, Burnside, W. 214, 248  
哈斯, Hasse, H. 138  
约当, Jordan, C. 62, 112  
范德曼得, Vandermonde, C. A. 22  
高斯, Gauss, K. F. 90  
格拉斯曼, Grassmann, H. 189  
马基, Mackey, G. W. 222, 227  
席柏斯忒, Sylvester, J. J. 139

### 11—16 划

笛卡儿, Descartes, R. 154  
闵可斯基, Minkowski, H. 138  
凯莱, Cayley, A. 56, 88, 89  
费廷, Fitting, H. 42  
贾柯勃逊, Jacobson, N. J. i  
福路本纽斯, Frobenius, F. G. 56, 90, 98  
黎卡特, Rickart, C. E. 244  
诺德, Noether, E. 218  
霍赤才得, Hochschild, G. i  
霍尔德, Hölder, O. 112  
豪斯多夫, Hausdorff, F. 115

[ G e n e r a l   I n f o r m a t i o n ]

书名= 数学名著译丛      抽象代数学   卷2    线性代数

作者=

页数= 2 5 5

S S 号= 0

出版日期=

封面页  
书名页  
版权页  
前言页  
目录页  
第一章

有限维向量空间

1. 抽象向量空间

习题1

2. 右向量空间

3.  $\mathcal{O}$ -模

习题2

4. 线性相关

习题3

5. 维数的不变性

习题4

6. 基及阵

习题5

7. 阵论上的应用

习题6

8. 向量集合的秩, 行列式秩

习题7

9. 商空间

10. 子空间的代数

习题8

11. 无关子空间, 直接和

习题9

第二章 线性变换

1. 定义及例子

习题10

2. 线性变换的合成

习题11

3. 线性变换的阵

习题12

4. 阵的合成

习题13

5. 基的改变, 阵的等价及相似

习题14

6. 线性变换的秩空间与核空间

习题15

7. 线性方程组

习题16

8. 右向量空间里的线性变换

习题17

9. 线性函数

习题18

10. 有限维空间与它的共轭空间之间的对偶性

	习题1 9
	1 1 . 线性变换的折转
	1 2 . 折转的阵
	1 3 . 射影
	习题2 0
第三章	单独一个线性变换的理论
	1 . 线性变换的最低多项式
	习题2 1
	2 . 循环子空间
	3 . 用最低多项式为指导的向量的存在
	习题2 2
	4 . 循环线性变换
	习题2 3
	5 . 由线性变换决定的 $\Phi[\lambda]$ -模
	6 . 有限生成的 $\mathfrak{o}$ -模, 这里 $\mathfrak{o}$ 是一个主理想整区
	7 . $\Phi$ 及 $\Psi$ 的生成元素的正规化
	8 . 元素属于主理想整区的阵的等价
	习题2 4
	9 . 有限生成的 $\mathfrak{o}$ -模的结构
	1 0 . 不变性定理
	1 1 . 向量空间关于线性变换的分解
	习题2 5
	1 2 . 特征多项式及最低多项式
	习题2 6
	1 3 . 定理1 3 的直接证明
	习题2 7
	1 4 . 迹及特征多项式的形式的性质
	习题2 8
	1 5 . 循环 $\mathfrak{o}$ -模的 $\mathfrak{o}$ -自同态环
	习题2 9
	1 6 . 有限生成的 $\mathfrak{o}$ -模的 $\mathfrak{o}$ -自同态环的决定, $\mathfrak{o}$ 是主理想整区
	1 7 . 与给定的线性变换可交换的线性变换
	习题3 0
	1 8 . 环 $\mathfrak{o}$ 的心
	习题3 1
第四章	线性变换的集合
	1 . 不变子空间
	习题3 2
	2 . 诱导线性变换
	习题3 3
	3 . 合成空间列
	4 . 线性变换集合的可分解性
	习题3 4
	5 . 完全可约性
	习题3 5
	6 . 与算子群论及模论的关系

	7 . 单独一个线性变换的可约性、可分解性、完全可约性
	习题3 6
	8 . 空间关于一个线性变换的准素支空间
	习题3 7
	9 . 交换线性变换的集合
	习题3 8
第五章	双线性形式
	1 . 双线性形式
	习题3 9
	2 . 双线性形式的阵
	3 . 非退化形式
	习题4 0
	4 . 线性变换关于一对双线性形式的折转
	习题4 1
	5 . 线性变换与双线性形式间的另一个关系
	6 . 纯量积
	7 . 厄米特纯量积
	习题4 2
	8 . 厄米特纯量积的阵
	习题4 3
	9 . 特殊除环上对称及厄米特纯量积
	习题4 4
	1 0 . 交错纯量积
	习题4 5
	1 1 . 威特定理
	习题4 6
	1 2 . 非交错斜称形式
第六章	欧几里得空间及单式空间
	1 . 笛卡儿基
	习题4 7
	2 . 线性变换与纯量积
	3 . 正交完全可约性
	4 . 对称、斜称及正交线性变换
	5 . 对称及斜称线性变换的典型阵
	习题4 8
	6 . 交换的对称及斜称线性变换
	习题4 9
	7 . 正规及正交线性变换
	习题5 0
	8 . 半定变换
	习题5 1
	9 . 任意线性变换的极因子分解
	习题5 2
	1 0 . 单式几何学
	习题5 3
	1 1 . 线性变换的分析函数

	习题5 4
第七章	向量空间的积
	1. 向量空间的积群
	习题5 5
	2. 线性变换的直接积
	习题5 6
	3. 双侧向量空间
	习题5 7
	4. 克伦内克积
	习题5 8
	5. 线性变换及阵的克伦内克积
	习题5 9
	6. 张量空间
	7. 张量的对称类
	习题6 0
	8. 向量空间的域的扩张
	9. 关于阵集合的相似性的一个定理
	习题6 1
	1 0. 代数的另一定义. 代数的克伦内克积
	习题6 2
第八章	线性变换环
	1. $\mathcal{A}$ 的单纯性
	习题6 3
	2. 算子方法
	3. $\mathcal{A}$ 的左理想
	习题6 4
	4. 右理想
	习题6 5
	5. 线性变换环的同构
	习题6 6
第九章	无限维向量空间
	1. 基的存在
	2. 维数的不变性
	3. 子空间
	4. 线性变换及阵
	5. 共轭空间的维数
	习题6 7
	6. 线性变换的有限拓扑
	习题6 8
	7. $\mathcal{A}$ 的全子空间
	习题6 9
	8. 对偶空间. 克伦内克积
	习题7 0
	9. 线性变换环里双侧理想
	1 0. 线性变换的稠密环
	习题7 1

1 1 . 同构定理

习题7 2

1 2 . 反自同构与纯量积

习题7 3

1 3 . 叔尔引理. 一般稠密性定理

1 4 . 线性变换的不可约代数

汉英名词对照表

人名索引

附录页